Matemáticas

Curso Preuniversitario

MATEMATICAS
DE
PREUNIVERSITARIO

CONSTANTINO MARCOS, S. M.
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICAS

JACINTO MARTINEZ, S. M.
DOCTOR EN CIENCIAS EXACTAS

VALENTIN HERNANDEZ
LICENCIADO EN CIENCIAS EXACTAS

MATEMÁTICAS

DE

PREUNIVERSITARIO

1966
EDICIONES S. M.
General Tabanera, 39
MADRID (19)

© Copyright by
EDICIONES S. M. MADRID
Con las debidas licencias
Derechos reservados
Número de Registro: 4.398.—64
Depósito legal: M. 4.084.—1966.
IMPRESO EN ESPAÑA

RAYCAR, S. A. IMPRESORES. Matilde Hernández, 27. Teléfono 271.91.00. Madrid (19)

PROLOGO

Fijada, en buena hora, la materia de las asignaturas de Ciencias en el Curso Preuniversitario, nos hemos esforzado en desarrollar en este tomo con la mayor fidelidad posible, el Cuestionario relativo a las Matemáticas.

Desde las primeras páginas llamará la atención del lector la orientación que hemos dado a estas lecciones de Algebra y Geometría, de acuerdo con las más recientes tendencias de la *Matemática moderna.* Hemos atendido sobre todo el carácter práctico y formativo. Queda este último bien acusado en los numerosos ejemplos resueltos que van incluidos en el texto, y en los abundantes ejercicios para resolver que se han puesto al fin de cada capítulo.

Desarrollamos en este tomo el *Temario de clases teóricas* promulgado en el *Boletín Oficial* de 28 de agosto de 1963. Pero al mismo tiempo las orientaciones metodológicas dadas insisten con verdadera fuerza en la necesidad de adiestrar a los alumnos en la resolución de problemas matemáticos, recorriendo con ellos no sólo las materias de nueva información, sino también aquellas otras fundamentales ya vistas en los cursos anteriores del Bachillerato. Para lograrlo, el mismo *Boletín Oficial* incluye un *Temario de clases prácticas,* al que han de referirse los problemas que se propongan en la Prueba de Madurez.

En dicho Temario se recomienda el "máximo cuidado en la selección de las cuestiones que se presenten al alumno".

No dudamos que para este fin nuestro libro de "Prácticas de Matemáticas para Preuniversitario", completamente adaptado al vigente plan de estudios, será de gran utilidad.

No nos resta sino expresar la confianza que tenemos de recibir sugerencias de los Profesores para la mejora de esta obra en sucesivas ediciones.

LOS AUTORES

INDICE

I. Aritmética y Algebra

		Págs.
1.	Teoría de conjuntos	9
2.	El número natural. Concepto de semianillo	27
3.	Sistemas de numeración	39
4.	El número entero	52
5.	Teoría de la divisibilidad numérica	66
6.	Averiguación de números primos	82
7.	Números congruentes	92
8.	Ecuaciones diofánticas	106
9.	El número racional: concepto de cuerpo	113
10.	Determinantes	128
11.	Propiedades de los determinantes	135
12.	Equivalencia de sistemas de ecuaciones lineales: regla de Cramer	147
13.	Polinomios con una indeterminada	161
14.	Principio de identidad de polinomios	174
15.	Divisibilidad de polinomios con una variable	181
16.	Distribuciones bidimensionales: regresión lineal	186
17.	Correlación lineal	203

II. Geometría y Trigonometría

18.	Las traslaciones en el plano	210
19.	Los giros en el plano	225
20.	Simetrías en el plano. Producto de traslaciones, giros y simetrías	235
21.	Razón simple. Teoremas de Menelao y Ceva	250

Págs.

22. La homotecia en el plano 259
23. La semejanza en el plano 270
24. La inversión en el plano 279
25. Traslaciones y giros en el espacio 290
26. Las simetrías en el espacio. Producto de traslaciones, giros y simetrías 298
27. Proyecciones ortogonales 307
28. La Geometría sobre la superficie esférica 314
29. Trigonometría esférica: triángulos rectángulos y rectiláteros 328
30. Resolución de triángulos oblicuángulos. Coordenadas geográficas 338
31. Coordenadas astronómicas y transformación de las mismas 352
32. Movimientos de la Tierra. Tiempos sidéreo y solar: El calendario 367

I.—Aritmética y Algebra

1

TEORIA DE CONJUNTOS

1. Unidad y conjunto.

Un bosque es un *conjunto* de árboles. Cada uno de éstos es un *elemento* del conjunto.

Una colección de sellos es un conjunto, del cual cada sello es un elemento.

Los conceptos de *unidad* y *conjunto* son conceptos *primarios* al espíritu humano: no se pueden descomponer en otros más sencillos. No se pueden, por tanto, definir. Basta dar ejemplos que los evoquen.

El conjunto A, formado por los elementos a, b y c, se representa así:

$$A = \{a, b, c\}$$

encerrando entre llaves los símbolos de los elementos.

Que el elemento a pertenece al conjunto A se escribe: $a \in A$.

Y que el elemento d no pertenece al conjunto A se representa así: $d \notin A$.

EJEMPLOS.—1. Un conjunto importante que hemos de estudiar en lo sucesivo es el conjunto N de los números naturales, o sea

$$N = \{0,1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

2. El conjunto B de los números primos menores que 20 es

$$B = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

Aquí el conjunto B se ha definido por *extensión*, es decir, enumerando los elementos que lo componen. También podía haberse expresado así:

$$B = \{\text{conjunto de números primos menores que } 20\}$$

Entonces el conjunto se ha definido por *comprensión*, es decir, enunciando una propiedad que verifican todos los elementos del conjunto, y sólo ellos.

La definición de un conjunto puede darse por *extensión* o por *comprensión*. Pero en todo caso debe quedar muy claro si un elemento determinado pertenece o no pertenece al conjunto.

2. Subconjuntos.

Consideremos los dos conjuntos

$$A = \{a, b, c\} \quad \text{y} \quad B = \{b, c\}$$

Observamos que todo elemento de B pertenece a A. Decimos que B es un *subconjunto*, o *parte* de A, o que B *está contenido* en A.

Un conjunto B *es subconjunto o parte de* A *cuando todo elemento de* B *pertenece a* A.

Se representa así:

$$B \subset A \quad \text{o bien} \quad A \supset C$$

Esta definición ha de tomarse en sentido amplio, es decir, cualquier conjunto es parte de sí mismo. Por ejemplo:

$$B \subset B$$

pues evidentemente cumple la definición de que todo elemento de B pertenece a él mismo.

3. Conjuntos iguales o idénticos.

Consideremos el conjunto C de los puntos de un plano que equidistan de dos puntos fijos M y N de dicho plano, y el conjunto C' de los puntos de la recta mediatriz del segmento MN.

Observamos que los dos conjuntos C y C' constan de los mismos puntos. Decimos que los dos conjuntos son *iguales*, y escribimos $C = C'$.

Dos conjuntos son iguales cuando constan de los mismos elementos.

En realidad, en la Geometría plana lo que demostramos es: 1.°, que todo punto de la mediatriz de un segmento MN equidista de los extremos M y N, o sea

$$C' \subset C$$

2.°, que todo punto que equidista de los puntos M y N pertenece a la mediatriz del segmento MN, o sea que

$$C \subset C'$$

De donde deducimos que $C = C'$.

En general, para demostrar que dos conjuntos son iguales hay que probar que *cada uno es parte del otro.*

4. Implicación.

En el ejemplo anterior, el conjunto C viene definido por la propiedad p, que consiste en equidistar de los puntos fijos M y N del plano.

El conjunto C' viene definido por la propiedad p', que consiste en pertenecer a la mediatriz del segmento MN.

El hecho de que los conjuntos estén ligados por la relación de inclusión

$$C \subset C'$$

se traduce para las propiedades p y p' en la relación de implicación

$$p \Rightarrow p'$$

que se lee "p implica p'", o sea, que el hecho de cumplirse la propiedad p supone que necesariamente se cumple también la propiedad p'.

Y el hecho de cumplirse que

$$C' \subset C$$

supone que también

$$p' \Rightarrow p$$

Entonces la propiedad p' implica a su vez la propiedad p. Esto se representa abreviadamente por el signo de la *doble implicación:*

$$p \Leftrightarrow p'$$

5. Conjunto unitario y conjunto vacío.

Se pide dar el conjunto de los satélites de la Tierra. Este conjunto no tiene más que un elemento, ya que la Tierra sólo tiene un satélite, que es la Luna. Aunque no tenga más que un elemento, se le con-

sidera como verdadero conjunto. Es un *conjunto unitario,* formado por un solo elemento.

Se pide ahora dar el conjunto de los hombres que viven en este momento en la Luna. Dicho conjunto no posee ningún elemento, ya que todavía ningún hombre ha podido poner su pie en nuestro satélite. Se le considera, sin embargo, como verdadero conjunto, y se le llama *conjunto vacío.*

Conjunto vacío es el que no tiene ningún elemento.

Se ha convenido en representarlo por la letra noruega ∅.

6. Reunión o unión de conjuntos.

Sean los conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, d, e\}$ y $C = \{a, b, c, d, e\}$.

Notamos que el conjunto C contiene todos los elementos de A y todos los de B, comunes y no comunes. Al conjunto C le llamamos *unión* o *reunión* de los conjuntos A y B, y se representa así:

$$C = A \cup B$$

Se llama *unión* o *reunión de dos conjuntos* A *y* B *al conjunto de elementos que pertenecen a* A, *a* B *o a ambos.*

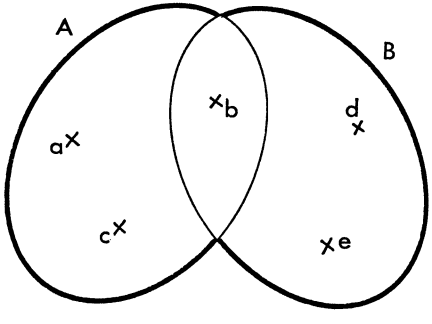


FIGURA 1

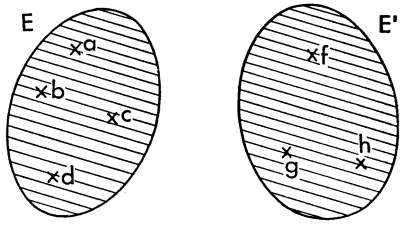


FIGURA 2

Es corriente representar un conjunto por un recinto cerrado, dentro del cual los elementos del conjunto vienen indicados por puntos. Esta representación se denomina *diagrama de Venn.*

En la figura 1 el conjunto unión C vendrá representado por el recinto de trazo grueso.

Sean los conjuntos $E = \{a, b, c, d\}$ y $E' = \{f, g, h\}$. En este caso los dos conjuntos no tienen ningún elemento común. Se llaman conjuntos *disjuntos.*

Los recintos que los representan tampoco tienen puntos comunes (fig. 2). Los dos recintos rayados representan al conjunto reunión

$$C = E \cup E' = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

7. Propiedades de la unión de conjuntos.

1.ª *Idempotente* $\forall\ A : A \cup A = A$.

El símbolo $\forall$ se llama *cuantificador universal*, y se lee "para todo ... se verifica..." $\forall\ A$ significa "para todo conjunto A se verifica..."

Esta propiedad es evidente.

2.ª *Conmutativa.* $A \cup B = B \cup A$.

También esta propiedad es evidente, según puede verse en la figura 1.

Sean ahora los conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, d, e\}$ y $C = \{f, g, h\}$. Podemos considerar la unión de los dos primeros $A \cup B$,

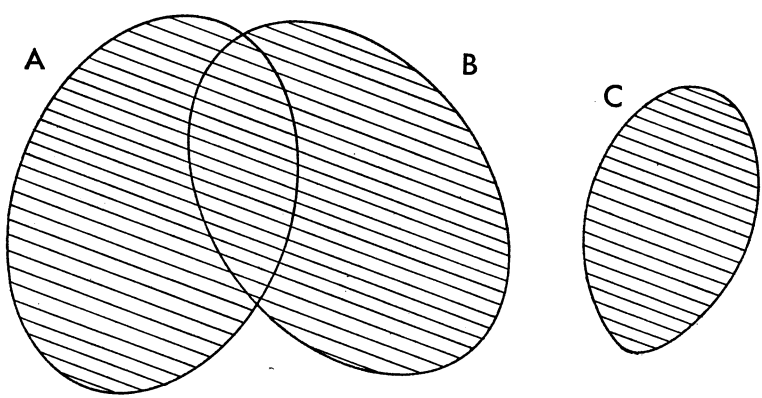


FIGURA 3

que es un nuevo conjunto, y a continuación hacer la unión de éste con el tercero, o sea

$$(A \cup B) \cup C$$

El paréntesis es un mandato de prioridad, y representa que la primera operación que hay que realizar es la que va dentro del mismo. El resultado es el conjunto

$$D = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

y está representado por los recintos rayados de la figura 3.

Pero también podíamos haber hallado primero la unión de los dos últimos, $B \cup C$, y a continuación la unión del primero con éste, o sea

$$A \cup (B \cup C)$$

El resultado hubiera sido el mismo conjunto D, formado por todos los elementos de A, de B y de C. Por tanto,

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$

propiedad que nos indica que al hacer la unión de varios conjuntos se pueden suprimir los paréntesis, o sea, se pueden verificar las operaciones en el orden que se quiera. Esta propiedad se llama *asociativa*, o sea

3.ª *Asociativa:* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

8. Intersección de conjuntos.

Sean los conjuntos $A = \{a, b, c,\}$ y $B = \{b, d, e\}$ de la figura 1. ¿Cuál es el conjunto de los elementos comunes a ambos? Es el con-

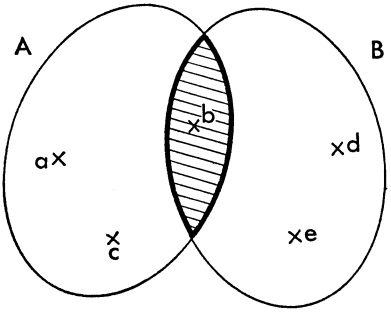


FIGURA 4

junto $C = \{b\}$. Se le llama *intersección* de los dos conjuntos. *Intersección de dos conjuntos* A *y* B *es el conjunto formado por todos*

los elementos comunes a ambos, o sea, que pertenecen a A *y a* B. Se expresa así:

$$C = A \cap B$$

La representación gráfica de C es el recinto común a los recintos A y B, o sea, el que está rayado en la figura 4.

Si los conjuntos son *disjuntos, la intersección es el conjunto vacío* $\varnothing$.

9. Propiedades de la intersección de conjuntos.

1.ª *Idempotente:* $\forall\ A\ :\ A \cap A = A$.

2.ª *Conmutativa:* $A \cap B = B \cap A$.

Observando la figura 4, en ambos casos el resultado es $C = \{b\}$.

Dados tres conjuntos, $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e, f\}$ y $C =$

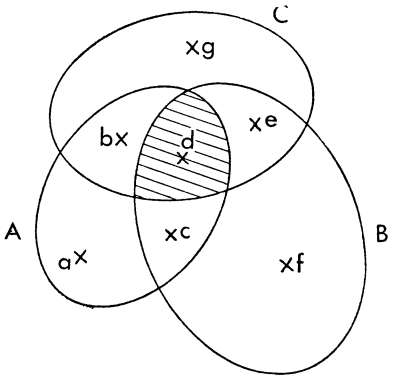


FIGURA 5

$= \{b, d, e, g\}$, podemos hallar primero la intersección de los dos primeros, $A \cap B$, que es un nuevo conjunto, y a continuación la intersección de éste con el C, o sea (fig. 5)

$$(A \cap B) \cap C$$

El resultado es

$$\{c, d\} \cap \{b, d, e, g\} = \{d\}$$

O bien, podemos hallar primero la intersección de los últimos, $B \cap C$, y en seguida la del primero con éste, o sea

$$A \cap (B \cap C)$$

obteniéndose como resultado

$$\{a, b, c, d\} \cap \{d, e\} = \{d\}$$

En ambos casos se obtiene el mismo resultado: el conjunto formado por los elementos comunes a A, B y C. Por tanto

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

que indica que se pueden suprimir los paréntesis. Esta es la propiedad *asociativa*, o sea

3.ª *Asociativa:* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

10. Propiedades comunes a la unión e intersección.

4.ª *Ley de absorción:*

$$(A \cup B) \cap A = A \quad ; \quad (A \cap B) \cup A = A$$

Para la 1.ª, observa la figura 1, y para la 2.ª, la figura 4. Esta ley permite *simplificar*.

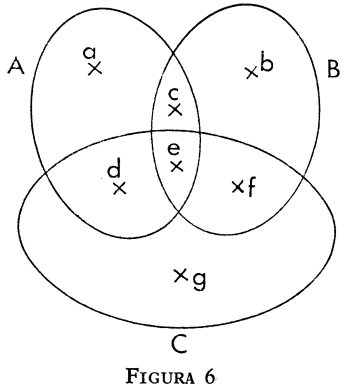


FIGURA 6

5.ª *Ley distributiva.*

a) *De la reunión respecto a la intersección.*

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

El conjunto del primer miembro se compone de los elementos comunes a A y B más los de C, o sea

$$\{c, d, e, f, g\}$$

y el del segundo miembro de los comunes a $(A \cup C)$ y a $(B \cup C)$, o sea, los mismos que antes (fig. 6).

b) *De la intersección respecto de la unión.*

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

El conjunto del primer miembro se compone de los elementos comunes a $A \cup B$ y C, o sea

$$\{a, b, c, d, e, f\} \cap \{d, e, f, g\} = \{d, e, f\}$$

y el del segundo miembro de los comunes a A y C más los comunes a B y C, o sea

$$\{d, e\} \cup \{e, f\} = \{d, e, f\}$$

Vemos, pues, que hay una analogía completa entre las dos operaciones unión e intersección. Se dice que ambas *tienen igual fuerza.*

11. Conjunto de las partes de un conjunto.

Dado un conjunto $R = \{a, b, c\}$, se trata de hallar todos los conjuntos que son subconjuntos o partes del mismo. Son los siguientes:

$$\emptyset,\ A = \{a\},\ B = \{b\},\ C = \{c\},\ D = \{a, b\},\ E = \{a, c\},$$
$$F = \{b, c\},\ R = \{a, b, c\}$$

Al conjunto formado por estos 8 conjuntos se denomina *conjunto de las partes del conjunto* R, y se representa por $P(R)$, o sea

$$P(R) = \{\emptyset, A, B, C, D, E, F, R\}$$

Los elementos de $P(R)$ son conjuntos.

Al conjunto más amplio que se considera en un problema determinado se denomina *conjunto referencial* o *universal.* En este caso es el conjunto R.

12. Operaciones o leyes de composición interna.

Consideremos el conjunto $P(R)$ del número anterior. La unión de dos elementos cualesquiera del mismo es otro elemento de dicho

conjunto $P(R)$. Y lo mismo digamos de la intersección. Por ejemplo:

$$A \cup C = E \quad ; \quad E \cap F = C$$

Decimos que la unión y la intersección de conjuntos son dos *operaciones* o *leyes de composición interna* definidas en el conjunto $P(R)$, puesto que aplicadas a dos elementos del conjunto dan como resultado otro elemento del mismo conjunto.

Cuando pensamos en una operación cualquiera definida en un conjunto, por ejemplo, la adición de dos números naturales, observamos que equivale a asignar a cada par de números naturales otro número natural, que es su suma.

Ley de composición interna definida en un conjunto es toda regla que permite asignar a cualquier pareja de elementos del conjunto otro elemento del mismo conjunto.

13. Estructuras matemáticas.

Cuando en un conjunto se han definido una o varias operaciones, que gozan de unas determinadas propiedades, se dice que se ha dotado al conjunto de una *estructura*. Esta depende de las propiedades que tengan dichas operaciones. Definir una operación en un conjunto equivale, pues, a organizar dicho conjunto según una estructura determinada. El mismo conjunto se puede estructurar de diversas formas, según las operaciones que se definan.

Precisamente el objeto principal de la llamada Matemática moderna es el estudio de las estructuras. Y se comprende el interés que actualmente se tiene en descubrir las leyes esenciales comunes a conjuntos de idéntica estructura. Se consigue con esto una gran economía de razonamientos, ya que la misma demostración sirve para todos ellos.

14. Retículos.

Acabamos de ver que en el conjunto $P(R)$ de las partes de un conjunto referencial R se han definido dos leyes de composición interna, la unión y la intersección, con las siguientes propiedades:

1.ª *Idempotente:* $A \cup A = A$; $A \cap A = A$.

2.ª *Conmutativa:* $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.

3.ª *Asociativa:* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

4.ª *Absorción:* $(A \cup B) \cap A = A$; $(A \cap B) \cup A = A$.

5.ª *Distributiva:* $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Se dice que el conjunto $P(R)$ tiene *estructura de retículo,* o simplemente que *es un retículo.*

Más adelante estudiaremos otro ejemplo de retículo, y el por qué de este nombre.

Un conjunto es un retículo cuando se han definido en él dos operaciones, cada una de las cuales cumple las cinco propiedades anteriores.

15. Relaciones binarias.

EJEMPLOS.—1. En el conjunto de los habitantes de una ciudad vamos a establecer una relación R, que va a ser la de *vecindad.* Dos habitantes cualesquiera, a y b, están ligados por esta relación si son vecinos, o sea, si habitan en la misma casa, y se escribirá:

$$aRb$$

No están ligados por esta relación en caso contrario, o sea, cuando viven en casa distinta. Se dice que la relación de vecindad es una *relación binaria.*

Se ha introducido una relación binaria R *en un conjunto cuando dados dos elementos cualquiera* a *y* b *del mismo, en este mismo orden, se puede decir sin ambigüedad* si o no *están ligados por dicha relación.*

2. En el conjunto de las rectas del plano establecemos la relación de *paralelismo.* Si dos rectas a y b son paralelas, están ligadas por dicha relación, y escribimos aRb. Si no son paralelas, no están ligadas por la relación.

El paralelismo es una relación binaria.

3. En el conjunto de las rectas del plano la *perpendicularidad* es una relación binaria.

4. En el conjunto N de los números naturales establecemos la relación "ser menor o igual que", representada por el símbolo $\leqslant$. Dados dos números naturales cualesquiera, por ejemplo, 3 y 7, en este orden, vemos que cumplen dicha relación, pues $3 \leqslant 7$. En cambio, 15 y 8, en este orden, no la cumplen.

La relación $\leqslant$ es una relación binaria.

16. Algunas propiedades de las relaciones binarias.

1.ª Una relación binaria tiene la *propiedad reflexiva* si para todo a, que pertenece al conjunto C, se cumple

$$\forall\ a \in C \Rightarrow aRa$$

Las relaciones de los ejemplos 1, 2 y 4 cumplen esta propiedad, pero no la del ejemplo 3: una recta no puede ser perpendicular a sí misma.

La propiedad reflexiva se representa por el esquema de la figura 7: todo elemento del conjunto debe estar relacionado consigo mismo, lo que expresamos por una flecha que sale del elemento y vuelve al mismo.

2.ª Una relación binaria R tiene la *propiedad simétrica* si para todo par a, b que verifica la relación se tiene

$$\forall\ a,\ \forall\ b,\ aRb \Rightarrow bRa$$

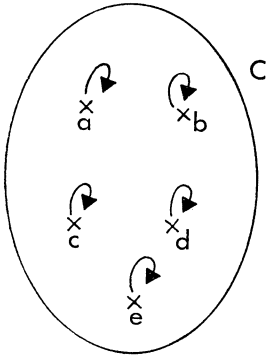


FIGURA 7

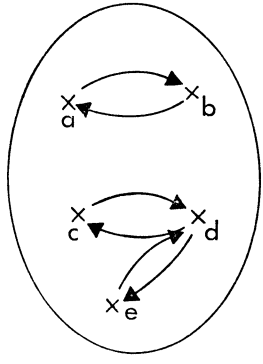


FIGURA 8

O sea, el hecho de verificarse la primera implica que también se verifica la segunda. Tienen esta propiedad las relaciones de los ejemplos 1, 2 y 3, pero no el de la 4: si $3 \leqslant 7$, no puede ser $7 \leqslant 3$.

La propiedad simétrica se representa por el diagrama de la figura 8: si de un elemento cualquiera a sale una flecha hacia otro b, tiene que haber otra flecha que sale de b hacia a.

3.ª Una relación binaria R tiene la *propiedad antisimétrica*, si para todo par de elementos a, b, el hecho de cumplirse la doble relación aRb, bRa, implica que $a = b$, o sea

$$\forall\ a, \forall\ b: \left.\begin{matrix} aRb \\ bRa \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = b$$

No tienen esta propiedad las relaciones de los ejemplos 1, 2 y 3, pero sí el del ejemplo 4: si $a \leqslant b$, $b \leqslant a$, necesariamente ha de ser $a = b$.

4.ª Una relación binaria R se dice que tiene la *propiedad transitiva* si

$$\left.\begin{matrix} aRb \\ bRc \end{matrix}\right\} \Rightarrow aRc$$

Tienen esta propiedad las relaciones de los ejemplos 1, 2 y 4, pero no la del ejemplo 3.

El esquema de la propiedad transitiva es el representado en la figura 9: si hay una flecha que sale de a y va hacia b, y otra que sale de b y va hacia c, tiene que haber una tercera flecha que sale de a y va hacia c.

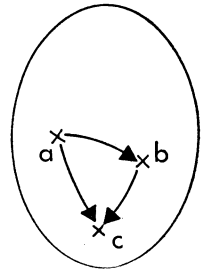


FIGURA 9

17. Relaciones de equivalencia.

Son aquellas relaciones binarias que tienen las propiedades 1.ª, 2.ª y 4.ª del número anterior, o sea, las propiedades *reflexiva, simétrica* y *transitiva.*

Son, por tanto, relaciones de equivalencia las de los ejemplos 1 y 2 del número 15, pero no las de los ejemplos 3 y 4. También es una relación de equivalencia la *identidad* de conjuntos dada en el número 3.

Una relación de equivalencia suele representarse por el símbolo $\sim$ y a menudo por el signo $=$, reservando el símbolo $\equiv$ para la identidad. Así, escribimos

$$a \sim b, \text{ o bien } a = b$$

para los elementos ligados por una relación de equivalencia.

18. Propiedad fundamental de las relaciones de equivalencia.

Una relación de equivalencia establece una clasificación de los elementos del conjunto en subconjuntos disjuntos, esto es, sin elementos comunes. Cada uno de dichos subconjuntos se denomina *clase de equivalencia:* dos elementos m y n están en la misma clase cuando, y sólo cuando, $m \sim n$.

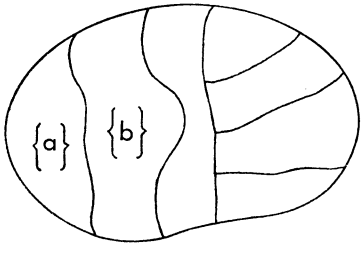


FIGURA 10

En efecto, llamemos $\{a\}$ la clase de todos los elementos equivalentes al a en la relación dada, y $\{b\}$ una clase distinta de $\{a\}$ (fig. 10).

Estos dos subconjuntos no pueden tener ningún elemento común, pues si hubiera un elemento c tal que $c \sim a$, $c \sim b$, por la propiedad simétrica sería $a \sim c$, $c \sim b$, y por la propiedad transitiva se tendría $a \sim b$, lo que va contra la hipótesis de que a y b son de clases distintas, o sea, no son equivalentes entre sí.

Al mismo tiempo, todo elemento del conjunto pertenece a alguna clase, pues, por ejemplo, $a \in \{a\}$, para todo $a \in C$, ya que $a \sim a$, por la propiedad reflexiva.

Para esta demostración nos hemos basado en las tres propiedades que caracterizan una relación de equivalencia.

Recíprocamente, si en un conjunto se efectúa una clasificación en subconjuntos disjuntos, esto equivale a establecer en el mismo una relación de equivalencia, haciendo que dos elementos sean equivalentes si pertenecen a la misma clase o subconjunto.

19. Conjunto cociente.

Dado un conjunto C y una relación de equivalencia R definida en él, consideremos el conjunto cuyos elementos son cada una de las clases de equivalencia determinadas por R. A dicho conjunto se denomina *conjunto de clases de equivalencia* de C respecto de la relación de equivalencia R, o simplemente *conjunto cociente*, y se representa por C/R.

EJEMPLOS.—1. Sea C el conjunto de todas las rectas del plano y R la relación de paralelismo entre ellas; C/R es el conjunto en que cada elemento consta de todas las rectas paralelas a una dada, o sea de todas las rectas que tienen la misma dirección. A C/R se le puede considerar como el conjunto de todas las *direcciones* del plano.

2. Sea C el conjunto de todos los segmentos del plano, y R la relación de congruencia entre ellos, o sea, el poder superponerse en el plano. Esta relación clasifica todos los segmentos colocando en la misma clase o subconjunto los que son congruentes, esto es, de igual longitud; C/R es el conjunto en el que cada elemento consta de todos los segmentos que tienen igual longitud. Cada elemento de C/R define una *longitud*.

El conjunto C/R es la magnitud *longitud*.

3. Sea C el conjunto de los habitantes de una ciudad, y R la relación de *vecindad*; C/R es el conjunto de *casas* de dicha ciudad.

20. Relaciones de orden.

Son aquellas que poseen las propiedades 1.ª, 3.ª y 4.ª del número 16, o sea, son *reflexivas*, *antisimétricas* y *transitivas*.

EJEMPLOS.—1. La relación $\leqslant$ en el conjunto de los números naturales. Tiene las tres propiedades:

1.ª *Reflexiva*

$$a \leqslant a$$

2.ª *Antisimétrica*

$$\left.\begin{array}{l} a \leqslant b \\ b \leqslant a \end{array}\right\} \Rightarrow a = b$$

3.ª *Transitiva*

$$\left.\begin{array}{l} a \leqslant b \\ b \leqslant c \end{array}\right\} \Rightarrow a \leqslant c$$

Cualesquiera que sean los números naturales a y b, éstos son siempre comparables según la relación $\leqslant$, pues de las dos afirmaciones $a \leqslant b$, $b \leqslant a$, una es siempre cierta. Se dice que la relación $\leqslant$ es una relación de *ordenación total.* El conjunto N queda con ella *totalmente ordenado.* Para representarlo suele ser cómodo el *diagrama lineal* de la figura 11.

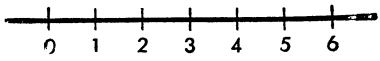


FIGURA 11

2. La relación de inclusión $A \subset B$ en el conjunto $P(R)$ de las partes de un conjunto R es una relación de orden, pues cumple las tres propiedades:

Reflexiva:

$$A \subset A$$

Antisimétrica:

$$\left.\begin{array}{l} A \subset B \\ B \subset A \end{array}\right\} \Rightarrow A = B$$

Transitiva:

$$\left.\begin{array}{l} A \subset B \\ B \subset C \end{array}\right\} \Rightarrow A \subset C$$

Pero ahora dos conjuntos cualesquiera no siempre son comparables según esta relación. Así, en el ejemplo del número 11 ni $A \subset B$, ni $B \subset A$. Se dice que la relación $\subset$ es una relación de *ordenación parcial.* El conjunto $P(R)$ queda con ella *parcialmente ordenado.* La representación es ahora un diagrama en forma de malla o red, debido a la existencia de elementos no comparables. Así, el conjunto $P(R)$ del número 11 vendría representado por la red cúbica de la figura 12. En ella cada conjunto está en línea con aquellos en los que está incluido o a los que incluye. El nombre de *retículo* dado al conjunto $P(R)$ alude a esta representación.

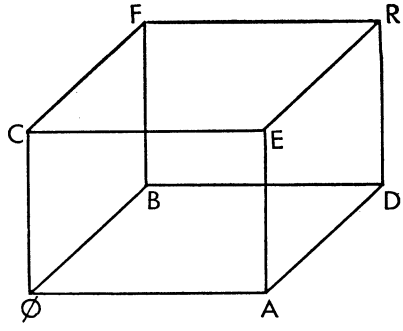


FIGURA 12

21. Correspondencias entre conjuntos.

Dados un conjunto A, que denominaremos *original*, y otro conjunto B, que llamaremos *imagen*, diremos que la pareja (a, b) es un *par ordenado* cuando $a \in A$ y $b \in B$. Todo conjunto C de pares ordenados obtenidos con los elementos de A y B diremos que establece entre A y B una *correspondencia*.

EJEMPLO.—Sea $A = \{a, a', a''\}$ y $B = \{b, b'\}$ y sea $C = \{(a, b), (a, b'), (a', b), (a'', b')\}$. El conjunto C establece entre A y B una correspondencia en la que a a le corresponden b y b' (llamados sus *homólogos* o *correspondientes*) a a' le corresponde b, y a'' tiene como homólogo b'.

Una correspondencia entre los conjuntos A y B se representa así

$$A \xrightarrow{f} B$$

Otra correspondencia distinta entre A y B la representaremos escribiendo encima de la flecha otra letra distinta de f, que se llama *característica*, por ejemplo, f', g, h, ...

Homólogo o *correspondiente* de un elemento a es cualquier elemento b que va asociado con él en un par ordenado del conjunto C. Se escribe así

$$f(a) = b$$

Si tomamos como original el conjunto B y como imagen el conjunto A, el mismo conjunto C de pares ordenados define una correspondencia $B \to A$ que llamaremos *inversa* de la primera y representaremos por f^{-1}:

$$B \xrightarrow{f^{-1}} A$$

en la que los homólogos de cada b son aquellos $a \in A$ tales que $(a, b) \in C$.

En el ejemplo dado son homólogos de b el a y el a'; y homólogos del b', el a y el a''.

Volviendo a la correspondencia f, si a cada a le corresponde un solo b, diremos que la correspondencia entre A y B es *unívoca*.

EJEMPLO 1.—En los conjuntos $A = \{a, a', a''\}$ y $B = \{b, b'\}$ la correspondencia definida por el conjunto $C = \{(a, b), (a', b'), (a'', b)\}$ es *unívoca*.

EJEMPLO 2.—Cada alumno ha puesto su nombre en los libros que tiene en clase. A cada libro le hacemos corresponder el nombre que tiene puesto. Esta correspondencia es *unívoca*.

EJEMPLO 3.—A cada día del año hacemos corresponder un color: el que lleva en el calendario. A cada día le corresponde un solo color, el rojo o el azul, según que sea festivo o no. Es correspondencia *unívoca*.

EJEMPLO 4.—Todos los asientos de clase están ocupados. A cada asiento hacemos corresponder el alumno que lo ocupa. Es correspondencia *unívoca*.

Si una correspondencia f es unívoca, y su inversa f^{-1} también lo es, la correspondencia es dos veces unívoca. Se llama *biunívoca*. En el ejemplo 4 la correspondencia es biunívoca.

EJERCICIOS

1. La potenciación en el conjunto N de los números naturales, ¿tiene la propiedad conmutativa?, ¿y la asociativa?
2. ¿Está bien definido el conjunto de los alumnos que aprobaron la prueba de madurez de Preuniversitario en 1964? ¿Y el de los que aprobarán el curso próximo?
3. Las dos secciones A y B de Preuniversitario de un determinado Centro de Enseñanza tienen el mismo número de alumnos. ¿Son iguales o idénticos los conjuntos A y B?
4. En el conjunto $P(R)$ de las partes de un conjunto R, ¿existe un elemento e tal que, cualquiera que sea $a \in P(R)$, se verifica

$$e \cup a = a \cup e = a?$$

¿Y tal que verifique

$$e \cap a = a \cap e = a?$$

Tal elemento, si existe, se denomina *elemento neutro* de la operación considerada.

5. Halla la unión e intersección de los conjuntos de letras dados por las palabras ROMA y CARO.
6. ¿Es relación de equivalencia la de "amistad"?, ¿y la de "paisanaje", o sea ser del mismo pueblo?
7. Define y expresa por extensión los siguientes conjuntos, dados por comprensión: a) el conjunto de los números dígitos (de una sola cifra); b) de los cuadrados de números naturales menores que 7; c) de los números impares menores que 15.
8. Dado el conjunto $\{N, Z, Q, R, C\}$, siendo N el conjunto de los números naturales, Z el de los enteros, Q el de los racionales, R el de los reales y C el de los complejos, ¿está ordenado dicho conjunto por la relación de inclusión? ¿Está totalmente ordenado?
9. La semejanza ¿es una relación de equivalencia? Define por abstracción la *forma* de las figuras.
10. Escribe las relaciones de pertenencia que existen entre los números 3, 4 y 5, y los siguientes conjuntos: 1.º N = números naturales; 2.º P = números primos; 3.º I = números impares. Escribe, igualmente, las relaciones de inclusión que existen entre dichos conjuntos.
11. Escribe el conjunto $P(R)$ de las partes del conjunto $R = \{a, b, c, d\}$.
12. ¿Cuántos subconjuntos tiene un conjunto de n elementos?
13. Representa mediante un diagrama de Venn estos casos: a) $A \subset A \cap B$; b) $A \supset A \cup B$.

14. En el conjunto N de los números naturales se define la ley de composición

$$a \perp b = \frac{a + b}{2}$$

¿Es conmutativa? ¿Es asociativa?

15. En el conjunto N se define la ley de composición $a \perp b = a + b + ab$. ¿Es conmutativa y asociativa dicha ley?

16. Entre los alumnos de una clase se pueden establecer varias relaciones binarias. ¿Qué tipos de relaciones son las que se enuncian por las expresiones: a) "es amigo de"; b) "sabe más que"; c) "nació el mismo año que"; d) "es más joven que".

17. Reproduce varias veces el diagrama de Venn de la figura 13, y raya en él los conjuntos siguientes: a) $A \cap B \cap C$; b) $(A \cup B) \cap C$; c) $A \cup (B \cap C)$.

18. En el diagrama de Venn de la figura 14 raya los conjuntos siguientes: a) $A \cap B \cap C$; b) $(A \cup D) \cap (B \cap C)$; c) $(A \cap B \cap C) \cup (B \cap C \cap D)$.

19. Define por extensión los conjuntos siguientes:

$$A = \{x/x \in N \text{ y } x < 6\}$$
$$B = \{x/x \in N \text{ y } x^2 < 82\}$$
$$C = \{x/x \in N \text{ y } x = \text{par digito}\}$$

$x/x \in N$ se lee "x es tal que x pertenece a N".

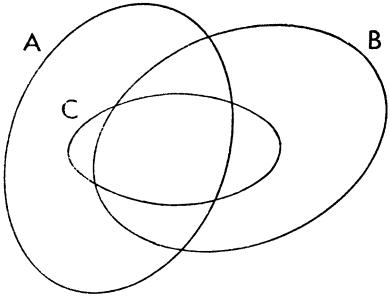


FIGURA 13

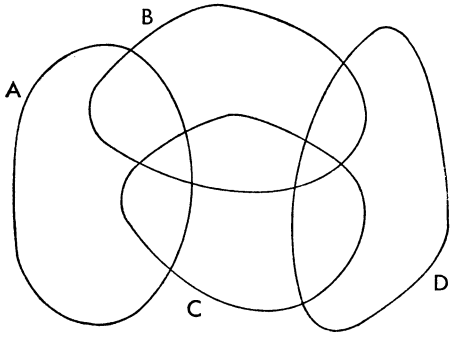


FIGURA 14

20. Dados los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{b, c, d, e\}$, halla el conjunto $P(A) \cap P(B)$.

2

EL NUMERO NATURAL. CONCEPTO DE SEMIANILLO

22. Conjuntos coordinables y cardinal de un conjunto.

Supongamos que todos los asientos de la clase están ocupados: a cada asiento le corresponde un alumno, y a cada alumno un asiento. Se dice que el conjunto de asientos y el de alumnos son *coordinables,* o que se pueden poner en *correspondencia biunívoca.*

Dos conjuntos A *y* B *son coordinables cuando se pueden poner en correspondencia biunívoca, o sea, cuando a cada elemento de* A *se le asigna uno, y sólo uno, de* B, *y a cada elemento de* B *se le asigna uno, y sólo uno, de* A.

Serán, por tanto, coordinables los jugadores de dos equipos de baloncesto; un grupo de ciclistas con sus máquinas correspondientes; los impactos sobre una pared y las balas que los han producido, etc. No lo serán los jugadores de un equipo de baloncesto y otro de fútbol, porque a cada jugador del primero se puede hacer corresponder uno del segundo, pero quedan seis jugadores de este último sin correspondencia posible en el equipo contrario.

La coordinabilidad de conjuntos es una relación de equivalencia, ya que:

1.° *Es reflexiva:* cualquier conjunto es coordinable consigo mismo.

2.° *Es simétrica:* si el conjunto de asientos es coordinable con el de alumnos, éste lo es con aquél.

3.° *Es transitiva:* si el conjunto de alumnos es coordinable con el de asientos, y éste con el de mesas, el conjunto de alumnos es coordinable con el de mesas.

Por tanto, la relación de coordinabilidad divide o clasifica el conjunto *C* de todos los conjuntos posibles en *clases de equivalencia,* en cada una de las cuales se colocan todos los conjuntos que son

coordinables entre sí. A cada clase de equivalencia del conjunto C/R se le designa por un nombre o símbolo, que es su *número cardinal.*

Así, la clase de los conjuntos vacíos se designa por "cero" (0); el cardinal de los conjuntos unitarios es "uno" (1); la clase de los conjuntos con un elemento más se representa por "dos" (2), etc.

Número cardinal es lo que tienen de común todos los conjuntos coordinables entre sí. Es, por tanto, la clase de los conjuntos coordinables entre sí.

Tres libros, tres planetas, tres submarinos, tres hombres, tres relojes..., tienen de común el ser "tres". El número cardinal es un concepto abstracto elaborado por la mente para clasificar todos los conjuntos. Es necesario insistir en este carácter abstracto de la idea de número, que para muchos va siempre ligado a objetos tangibles, como dedos, árboles, etc. Tampoco hemos de confundir el concepto de número con el nombre o símbolo que se le da. El concepto de número es anterior al nombre; es, además, universal. Los símbolos, en cambio, han variado según las épocas.

Cardinal de un conjunto A *es el de su clase de equivalencia respectiva.* Se representa por $C(A)$.

23. La operación de contar.

Un pastor cuenta sus ovejas a medida que van entrando al redil: mira a una, y dice "uno", mira a otra, y dice "dos"... No hace más que poner el conjunto de las ovejas en correspondencia biunívoca con el conjunto, bien conocido desde la escuela, de los entes abstractos llamados números cardinales: 1, 2, 3, 4, 5... Si al mirar a la última oveja ha dicho "ciento ocho", concluye que tiene 108 ovejas.

Contar un conjunto es ponerlo en correspondencia biunívoca con una parte del conjunto de los números cardinales.

24. Correspondencias ordenadas y número ordinal.

Sean dos conjuntos ordenados (o sea, en los que hemos definido la relación de ordenación $\leqslant$) $C = \{a, b, c, ...\}$ y $C' = \{a', b', c', ...\}$. Establezcamos entre ellos una correspondencia biunívoca f.

Decimos que la correspondencia f entre los conjuntos C y C' es una *correspondencia ordenada,* cuando al ser $a \leqslant b$, es $f(a) \leqslant f(b)$.

Y decimos que en un conjunto C hay un primer elemento p, si cualquiera que sea q, se verifica que $p \leqslant q$.

Consideremos dos conjuntos ordenados C y C', con primer elemento. Si entre ellos se establece una correspondencia ordenada, vamos a demostrar que *los primeros elementos se corresponden.*

Sea p el primer elemento de C y p' el primero de C'. Si a p le correspondiese un q', distinto de p', tendría que cumplirse que $p' < q'$ (por ser p' primer elemento). Pero como la correspondencia es ordenada, a p' tendría que corresponderle en C un q, que debería ser anterior a p, según se indica en el esquema.

$$\begin{array}{lccc} C & q & < & p \\ & \uparrow & & \downarrow \\ C' & p' & < & q' \end{array}$$

por ser $p' < q'$. Como esta conclusión es contraria a la hipótesis de que p es primer elemento, hay que concluir que los primeros términos se corresponden.

Bastaría prescindir de estos primeros términos para llegar, mediante análogo razonamiento, a demostrar que también se corresponden los primeros términos de los conjuntos restringidos resultantes. A éstos les llamaremos *elementos segundos* de los conjuntos primitivos. Del mismo modo demostraremos que se corresponden los *elementos terceros, cuartos,* etc.

Pues bien, *lo que tienen de común los elementos que se corresponden en varios conjuntos ordenados es lo que se denomina su número ordinal.*

Para los números ordinales se emplean los mismos nombres y símbolos que para los cardinales.

25. Número natural.

El número natural surge al fusionar dos conceptos: el número cardinal y el número ordinal. Así, "tres", lo mismo puede significar que hay tres naranjas en un cesto, o que cierto individuo es el tercero de una lista.

La identificación de los dos conceptos se funda en el siguiente *teorema fundamental de la Aritmética:*

Si dos conjuntos ordenados poseen el mismo número cardinal, sus últimos elementos poseen el mismo número ordinal, y recíprocamente.

El número *ordinal* resulta de abstraer la naturaleza de los objetos teniendo en cuenta solamente el orden.

El número *cardinal* resulta de considerar no un elemento, sino todo el conjunto, abstrayendo la naturaleza de los elementos que lo componen y el orden en que se consideren.

Resulta, pues, que el número *natural* puede emplearse para contar, y entonces se llama *cardinal,* o para ordenar, y entonces se llama *ordinal.*

26. La operación de ordenar.

Consideremos las propiedades de la ordenación de los números naturales:

1.ª *Ordenación total:* dados dos números naturales distintos, uno de ellos precede al otro.

2.ª *Transitiva:* si $a \leqslant b$, y $b \leqslant c$, entonces $a \leqslant c$.

3.ª *Antisimétrica:* si $a \leqslant b$, y $b \leqslant a$, entonces $a = b$.

4.ª *Buena ordenación:* dado un número natural arbitrario, existe uno que le sigue inmediatamente, y no hay ninguno comprendido entre ambos.

5.ª *Primer elemento:* existe un número natural que no es siguiente de ninguno.

Como consecuencia de la ordenación de los números naturales, se pueden emplear estos números para ordenar conjuntos. *Ordenar un conjunto* es formar parejas entre los elementos del conjunto y los números naturales, de modo que estén en correspondencia biunívoca, y que si en un par aparece un número natural, en otros pares aparezcan todos los números naturales que le preceden.

El número que forma pareja con un elemento determinado del conjunto se llama *número ordinal* o *de orden* de dicho elemento en el conjunto. Aquí, a diferencia de lo que ocurría en la operación de contar, es esencial la forma de efectuar los apareamientos. A cada posible apareamiento le corresponde una ordenación del conjunto.

Las propiedades 1.ª a 5.ª de la ordenación de los números naturales se trasladan así al conjunto dado. Se dice entonces que se ha ordenado dicho conjunto.

27. Conjuntos finitos e infinitos.

Un conjunto C se dice que es *finito* cuando cumple las siguientes propiedades:

1.ª *Es posible ordenarle de modo que tenga un primer elemento* (anterior a todos los demás) *y un último elemento* (posterior a todos los demás).

2.ª *Todo conjunto parcial de* C *tiene también primer y último elemento.*

Si a un conjunto finito C le añadimos un nuevo elemento, obtenemos otro conjunto C' no coordinable con el anterior, pues al tratar de hacer la coordinación, siempre sobraría el elemento agregado. Si al conjunto C' le añadimos de nuevo otro elemento, se obtiene otro conjunto C'' no coordinable con el C'; y como esta operación puede proseguirse indefinidamente, podemos formar infinidad de conjuntos no coordinables. Como a cada uno de éstos le corresponde un número natural distinto, resulta que *existen infinitos números naturales;* o que *la serie natural de los números es ilimitada.*

Toda sucesión que se pueda poner en correspondencia biunívoca con la serie natural de los números se llama *numerable.* Ejemplo, la sucesión formada por los infinitos términos de la progresión 3, 9, 27, 81, ..., que tiene primer elemento, pero carece de último elemento.

Otro ejemplo son los números racionales. En cambio, Cantor demostró que no es numerable el conjunto de los números reales (o lo que es lo mismo, el conjunto de los puntos de la recta).

28. Adición de números naturales.

Sean A y B dos conjuntos disjuntos, o sea, tales que

$$A \cap B = \varnothing$$

Llamemos a al cardinal de A, o sea, $C(A) = a$, y b al cardinal de B, o sea, $C(B) = b$. El conjunto

$$A \cup B$$

existe siempre, y su cardinal lo representamos por c, o sea, $c = C(A \cup B)$.

Al número c le denominaremos *suma* del a y el b, y lo representaremos así:

$$c = a + b$$

Hemos definido así en el conjunto N de los números naturales una ley de composición interna, que llamaremos *adición*, que asigna a cada par de números naturales, a y b, otro c llamado *suma* de ambos.

Observemos que el número c depende exclusivamente de a y de b, pero no de los conjuntos A y B que han servido para definir la operación de adición. O sea, que si tomamos otros conjuntos A' y B' tales que

$$C(A') = C(A) = a \quad ; \quad C(B') = C(B) = b$$

se verificará que

$$C(A' \cup B') = C(A \cup B) = c$$

o sea, que $A' \cup B'$ y $A \cup B$ serán coordinables. Esta es la ley *uniforme* de la adición.

29. Propiedades de la adición de números naturales.

I. *Conmutativa:* $a + b = b + a$.

Ya que $A \cup B = B \cup A$, según el núm. 7.

II. *Asociativa:* $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Ya que $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

III. *Elemento neutro.*—Definida en un conjunto C una ley de composición interna, que designaremos por $\perp$, se llama elemento neutro e, a aquel que cumple la condición

$$a \perp e = e \perp a = a$$

cualquiera que sea a.

En la adición se tiene

$$a + 0 = 0 + a = a$$

cualquiera que sea a. Luego el *cero* es el *elemento neutro* de la adición de números naturales.

30. Estructura de semigrupo.

Todo conjunto C en el que se ha definido una ley de composición interna, que designaremos por $\perp$, que tenga las siguientes propiedades:

1.ª *Uniforme:* el conjunto es *cerrado* respecto a dicha operación; de dos elementos a y b se obtiene siempre el mismo c que también pertenece al conjunto

$$a \perp b = c$$

2.ª *Asociativa:*

$$(a \perp b) \perp c = a \perp (b \perp c)$$

se dice que tiene la *estructura de semigrupo,* o simplemente que es un *semigrupo.*

Si, además, tiene la propiedad *conmutativa,* se dice que es un *semigrupo abeliano* o *conmutativo.* Y si, además, tiene elemento neutro e, tal que $a \perp e = a$, se dice que "el semigrupo posee *elemento neutro*".

De las propiedades del número 29 deducimos que: *El conjunto* N *de los números naturales es un semigrupo abeliano respecto a la operación de adición,* o más sencillamente, *es un semigrupo aditivo con elemento neutro.*

31. Producto cartesiano de conjuntos.

Un señor tiene en su guardarropa tres pantalones y cuatro chaquetas. ¿Cuántos trajes tiene?

Designemos por p, p' y p'' los pantalones, y por c, c', c'' y c''' las chaquetas. Ya que con cada pantalón puede ponerse cualquiera de las chaquetas, formamos el siguiente cuadro:

	c ↓	c' ↓	c'' ↓	c''' ↓
$p \longrightarrow$	pc	pc'	pc''	pc'''
$p' \longrightarrow$	$p'c$	$p'c'$	$p'c''$	$p'c'''$
$p'' \longrightarrow$	$p''c$	$p''c'$	$p''c''$	$p''c'''$

Cada traje es una pareja formada por un pantalón y una chaqueta. El conjunto de trajes se llama *producto cartesiano* del conjunto de pantalones por el conjunto de chaquetas.

Producto cartesiano de dos conjuntos A *y* B *es el conjunto de todos los pares ordenados que se forman asociando cada elemento de* A *con cada elemento de* B.

En el ejemplo anterior, siendo $A = \{p, p', p''\}$, $B = \{c, c', c'', c'''\}$, el producto cartesiano es $A \times B = \{pc, pc', pc'', pc''', p'c, p'c', p'c'', p'c''', p''c, p''c', p''c'', p''c'''\}$.

32. Multiplicación de números naturales.

Sean A y B dos conjuntos cuyos números cardinales son a y b. Formemos el producto cartesiano de ambos, $A \times B$, y sea c su cardinal.

Al número c le denominaremos *producto* del a y el b, y lo representaremos así:

$$c = a \times b, \quad \text{o también} \quad c = a \cdot b$$

Hemos definido así en el conjunto N de los números naturales una operación o ley de composición interna, que llamaremos *multiplicación*, que asigna a cada par de números naturales, a y b, otro c, llamado *producto* de ambos.

El número c depende exclusivamente de a y de b, pero no de los conjuntos A y B que han servido para definir la operación de multiplicación.

En efecto, tomemos otros conjuntos A' y B' tales que

$$C(A') = C(A) = a \quad ; \quad C(B') = C(B) = b$$

Por ejemplo, como en el número anterior,

$$A = \{p, p', p''\} \quad ; \quad B = \{c, c', c'', c'''\}$$
$$A' = \{p_1, p'_1, p''_1\} \quad ; \quad B' = \{c_1, c'_1, c''_1, c'''_1\}$$

Resultan $A \times B$ y $A' \times B'$ coordinables, luego tienen el mismo cardinal.

Esta es la ley *uniforme* de la multiplicación.

De la definición dada deducimos esta otra: para contar el número de elementos del producto cartesiano $A \times B$, lo hacemos primero por columnas

$$\begin{array}{cccccccc} p\,c & & p\,c' & & p\,c'' & & p\,c''' \\ p'\,c & & p'\,c' & & p'\,c'' & & p'\,c''' \\ p''c & & p''c' & & p''c'' & & p''c''' \\ \hline 3 & + & 3 & + & 3 & + & 3 \end{array}$$

resultando

$$3 + 3 + 3 + 3$$

y como dicho número lo hemos llamado 3×4, se obtiene

$$3 \times 4 = 3 + 3 + 3 + 3$$

La multiplicación es una adición de sumandos iguales:

$$a \cdot b = a + a + a + \overset{(b}{\ldots\ldots} + a$$

33. Propiedades de la multiplicación.

I'. *Conmutativa:* $a \cdot b = b \cdot a$.

Si en el cuadro anterior hubiéramos contado primero por filas hubiera resultado

$$4 + 4 + 4 = 4 \times 3$$

Luego

$$3 \times 4 = 4 \times 3$$

II'. *Asociativa:* $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

En efecto

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot b + a \cdot b + \overset{(c}{\ldots\ldots} + a \cdot b = a + a + \overset{(b}{\ldots\ldots} + a + a +$$
$$+ a + \overset{(b}{\ldots\ldots} + a + \overset{(c}{\ldots\ldots} + a + a + \overset{(b}{\ldots\ldots} + a = a + a +$$
$$+ \overset{(b \cdot c}{\ldots\ldots\ldots} + a = a \cdot (b \cdot c)$$

III'. *Elemento neutro:* $a \cdot 1 = a$, cualquiera que sea a, ya que convenimos que

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = 1 + 1 + \ldots\ldots + 1 = a$$

Luego el número 1 es el elemento neutro de la multiplicación.

De estas propiedades deducimos que: *El conjunto* N *de los números naturales es un semigrupo abeliano respecto a la operación de multiplicar,* o más sencillamente, es un *semigrupo multiplicativo con elemento unidad.*

34. Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición.

Se tiene

$$(a + b) \cdot c = (a + b) + (a + b) + \overset{(c}{\ldots\ldots} + (a + b) = a + a +$$
$$+ \overset{(c}{\ldots\ldots} + a + b + b + \overset{(c}{\ldots\ldots} + b = a \cdot c + b \cdot c$$

o sea

IV'. *Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición:*

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

35. Concepto de semianillo.

Todo conjunto C en el que se pueden definir dos operaciones o leyes de composición interna distintas, la primera con las propieda-

des conmutativa, asociativa y existencia de elemento neutro; la segunda con las propiedades asociativa y distributiva respecto a la anterior operación, es un *semianillo*. Si, además, la segunda operación tiene las propiedades conmutativa y existencia del elemento neutro, se dice que es un *semianillo conmutativo con elemento unidad*, ya que el 1 es el elemento neutro de la multiplicación.

Por cumplir las propiedades I, II y III del número 29, y las I', II', III' y IV' de los números 33 y 34, *el conjunto* N *de los números naturales constituye un semianillo conmutativo con elemento unidad.*

36. Operaciones inversas.

Son la *sustracción*, inversa de la adición, y la *división*, inversa de la multiplicación.

Si a y b son números naturales, $a + b$ también lo es. No puede decirse lo mismo de la diferencia $a - b$. En efecto, basta que a sea menor que b para que la diferencia sea imposible dentro del campo de los números naturales.

Si a y b son números naturales, el producto $a \cdot b$ también lo es. No ocurre siempre lo mismo con el cociente a/b. En efecto, la división exacta sólo es posible cuando el dividendo es múltiplo del divisor. En este caso el cociente entre ambos se denomina *cociente exacto.*

En caso contrario se llama *cociente entero* al mayor número natural que multiplicado por el divisor dé un producto menor que el dividendo.

Veremos en capítulos posteriores cómo hubo que ampliar el campo de los números para hacer que tanto la sustracción como la división fueran siempre posibles.

EJERCICIOS

1. Demostrar que en un polígono, el conjunto de sus vértices es coordinable con el de sus lados; y que dichos conjuntos no son coordinables si se trata de una línea quebrada abierta.
2. Comprobar y razonar mediante conjuntos de objetos las leyes de la adición y las propiedades de la sustracción.

   En particular demostrar que: 1.° *al aumentar* (o disminuir) *el minuendo de una sustracción, la diferencia aumenta* (o disminuye) *en el mismo número;* 2.° *al aumentar* (o disminuir) *el sustraendo, la diferencia disminuye* (o aumenta) *en el mismo número;* 3.° *al aumentar* (o disminuir) *el sustraendo y el minuendo en el mismo número, la diferencia no altera.*
3. ¿Qué propiedades de la adición justifican las igualdades siguientes?:

$$a + b + c + d = c + a + (d + b);$$
$$a + b + c + d = a + (b + c) + d = (d + b) + (a + c)$$

4. Demostrar la ley de monotonía de la adición: si $a > b$ es $a + c > b + c$, basándose en la ley de uniformidad, y en que $a = b + d$.

5. Demostrar la ley de monotonía de la multiplicación: si $a > b$ es $a \cdot c > b \cdot c$, basándose en que $a = b \cdot d$ (supuesto d entero) y en la ley uniforme.

6. ¿Por qué se ha convenido en definir

$$a \cdot 1 = a?$$

7. ¿Por qué se ha convenido adoptar la definición

$$c \cdot 0 = 0 \cdot c = 0?$$

8. Si $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{x, y, z\}$, forma el conjunto producto $A \times B$.

9. En el campo de los números naturales, ¿tienen siempre solución las ecuaciones

$$a + x = b \quad ; \quad a \cdot x = b?$$

10. Halla los números de N tales que

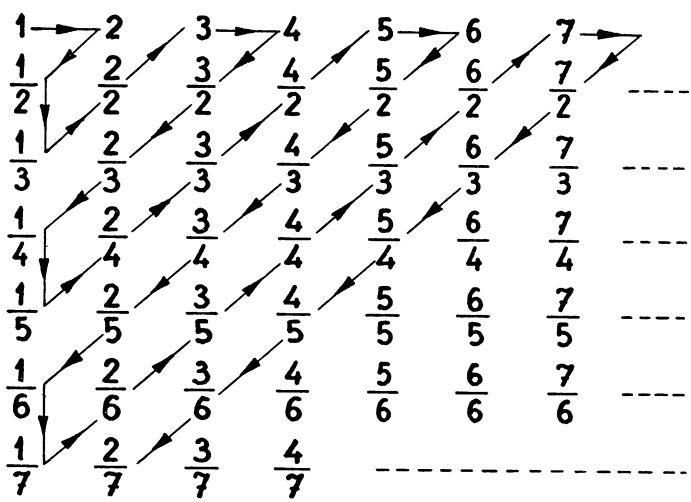
$$a + b = a \cdot b$$

11. Al dividir el número $a = 2.103$ por el número natural b se halla c de cociente y 81 de resto. Halla b y c.

12. Se dan dos números naturales a y b, siendo $a > b$. Se aumenta a en 5 y al mismo tiempo se disminuye b en 5. ¿Cómo se modifica la suma, la diferencia y el producto de dichos números?

13. ¿Es numerable el conjunto de los múltiplos de 3? Dicho conjunto, ¿es un semigrupo aditivo?; ¿es un semigrupo multiplicativo?

14. Mediante el siguiente cuadro



siguiendo las flechas, simplificando las fracciones y suprimiendo aquellas que ya están repetidas, demuestra que el conjunto de los números racionales es *numerable*. Escribe efectivamente los 20 primeros términos de esta sucesión numerable.

15. Un conjunto se dice que está *bien ordenado* si todo subconjunto no vacío admite un *primer* elemento. Entre los siguientes conjuntos, ordenados por magnitud creciente: a) los enteros positivos; b) los enteros negativos; c) los racionales x tales que $0 < x < 1$; d) el conjunto de las fracciones $1/n$, con $n > 0$; e) el conjunto de los números $1 - 1/n$, con $n > 0$, ¿cuáles están bien ordenadas?

3

SISTEMAS DE NUMERACION

37. Objeto de la numeración.

Siendo indefinida la serie de los números naturales, es imposible dar un nombre o una representación particular arbitraria a cada uno de ellos.

SISTEMA DE NUMERACIÓN *es un conjunto de reglas y convenios que nos permiten expresar verbal y gráficamente los números mediante un número limitado de palabras y signos.*

El sistema *romano,* todavía empleado en ciertos usos, descompone el número en suma o diferencia de otros varios, cada uno de los cuales se representa por un signo especial: I, V, X, L, C, D, M.

El sistema *decimal,* ideado por los indios e introducido en Europa por la influencia de los árabes, durante la Edad Media, utiliza el principio del *valor relativo,* es decir, una misma cifra representa valores distintos según el lugar que ocupa. Se eligió el número *diez* como base, por ser éste el número de dedos de ambas manos. Pero lo mismo se hubiera podido tomar como base un número cualquiera mayor que 1.

Así se obtienen diversos *sistemas de numeración,* cuyas propiedades estudiaremos en los números siguientes.

38. Base y órdenes de unidades.

Un objeto puede imaginarse descompuesto en partes, por lo cual se le puede considerar como el conjunto de éstas. Un libro es un objeto, pero se le puede considerar como un conjunto de hojas.

Un objeto, en el que no es esencial considerar las partes, se denomina *unidad simple.* En cambio, si se le considera compuesto de partes, se le denomina *unidad colectiva.* Por ejemplo, un ejército es una unidad colectiva, compuesta de divisiones, éstas de batallones, éstos de compañías, y éstas, a su vez, de soldados. Un soldado sería una unidad simple.

Supongamos que queremos contar y ordenar los lápices que hay en el almacén de una fábrica de dichos objetos. Comenzamos por juntarlos por *docenas,* sobrando, por ejemplo, 8 lápices sueltos. Con cada docena hacemos un paquete. En una caja apropiada ponemos doce de dichos paquetes, que componen una *gruesa* (doce docenas). Supongamos que quedan 5 paquetes sueltos sin posible acoplamiento en una caja. Las cajas coloquémoslas ahora en cajones, y sean 9 los que hemos obtenido de éstos, quedando 3 cajas sueltas. ¿Cuántos lápices hay en el almacén? Son:

9 cajones, 3 cajas, 5 paquetes, 8 lápices

o más sencillamente:

9 C, 3 c, 5 p, 8 l o sea, 9358 lápices

si convenimos en que la última cifra representa unidades simples, la anterior docenas, la anterior gruesas y la anterior docenas de gruesas.

El número 9358 está expresado en el sistema de base 12. Para escribir un número en este sistema se precisan dos nuevas cifras, además de las que corrientemente empleamos en el sistema decimal, una para el 10 y otra para el 11. Se suelen indicar el 10 con α y el 11 con β.

Para obtener la expresión 9358 se ha aplicado el principio del *valor relativo* de las cifras. Este principio, atribuido a los babilonios y desarrollado por los indios, fue de enorme trascendencia para la civilización. Con los sistemas anteriores, como el romano, el cálculo era tan complicado que solamente los especialistas podían realizar las operaciones de multiplicar y dividir, hoy al alcance de cualquier niño de la escuela. Existen pocos ejemplos de adelantos científicos que hayan facilitado tanto la vida diaria.

El uso del diez como base de numeración se remonta a los primeros tiempos de la civilización, y se debe evidentemente a ser diez los dedos de la mano, por medio de los cuales contaban los conjuntos o colecciones de objetos. Sin embargo, quedan vestigios de haberse empleado otros sistemas, como el de base 12 por los babilonios. Supervivencias de este sistema son la costumbre de contar por docenas, la división del día en 24 horas, de éstas en 60 minutos y de éstos en 60 segundos, etc. (60 es múltiplo de 12).

Incluso en nuestros días ha habido quienes han defendido la elección de la base 12 en lugar del 10, ya que por ser 12 divisible por 2, 3, 4 y 6, el cálculo de divisiones y fracciones se simplificaría bastante.

El empleo de bases mayores traería el grave inconveniente de tener que emplear muchas cifras distintas. El empleo de bases pequeñas tiene, a su vez, la desventaja de que los números un poco elevados vienen expresados por muchas cifras.

El sistema de base 2, llamado *sistema diádico,* ha cobrado recientemente un interés especial a causa de su utilización en las modernas máquinas de calcular electrónicas. Sólo emplea los digitos 0 y 1: el 1 equivale al paso de corriente y el 0 a la interrupción.

Con el fin de comprender mejor el modo de operar en el sistema decimal, universalmente admitido hoy día, conviene desarrollemos la teoría de las operaciones en un sistema de base m cualquiera, con la única condición que $m > 1$.

Las unidades simples y colectivas se clasifican en *órdenes* del siguiente modo: elegimos un número m, mayor que 1, que llamamos *base.*

La unidad simple se denomina *unidad de primer orden.* El conjunto de m unidades de primer orden se denomina unidad colectiva *de segundo orden.* El conjunto de m unidades de segundo orden forma una unidad de *tercer orden,* y así sucesivamente. En general m *unidades de un orden cualquiera constituyen otra unidad colectiva del orden inmediato superior.*

Las relaciones entre las diversas clases de unidades se deducen inmediatamente: la de segundo orden vale m unidades simples; la de tercer orden, $m \cdot m = m^2$ unidades simples, y la de orden n vale m^{n-1} *unidades simples.*

39. Expresión polinómica de un número en el sistema de base m.

Se verifica el siguiente *teorema fundamental* de la numeración:

Todo número N puede descomponerse de modo único en la forma polinómica

$$N = a + bm + cm^2 + dm^3 + \ldots + gm^{n-1} + hm^n \qquad [1]$$

siendo a, b, c ... g, h *números naturales menores que* m.

En efecto, para expresar el número N en forma polinómica de la base m, basta efectuar las divisiones siguientes:

$$\begin{array}{r|l} N & m \\ \hline a & q_1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} q_1 & m \\ \hline b & q_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} q_2 & m \\ \hline c & q_3 \end{array} \qquad \ldots \qquad \begin{array}{r|l} q_{n-1} & m \\ \hline g & h \end{array}$$

siendo

$$\left.\begin{array}{r} N = q_1 m + a \\ q_1 = q_2 m + b \\ q_2 = q_3 m + c \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ q_{n-1} = hm + g \end{array}\right\} \qquad [2]$$

Como cada cociente es menor que el dividendo, los números q_1, q_2, q_3, ..., son cada vez menores, con lo que llegaremos a un cociente $q_n = h < m$. En éste terminan las divisiones. Si cada uno de los valores q_{n-1}, q_{n-2}, ..., de [2] los reemplazamos en la igualdad anterior, obtenemos precisamente el resultado pedido [1].

EJEMPLO.—*Representar en el sistema de base 7 un conjunto de 342 objetos.*
Solución: Efectuamos las divisiones:

$$\begin{array}{r|l} 342 & 7 \\ \hline 62 & 48 \mid 7 \\ \hline 6 & 6 \mid 6 \end{array}$$

El número pedido es, pues: $\mathbf{666}_{(7}$. El subíndice (7 indica la base en que está expresado el número.

Recíprocamente, si a', b', c', ..., son números menores que m, hallados por cualquier método, que satisfacen la relación [1], podemos escribir ésta en la forma

$$N = a' + (b' + c'm + d'm^2 + \ldots + h'm^{n-1})\ m$$

y entonces resulta que a' es el resto de la división de N por m, siendo el cociente

$$b' + c'm + d'm^2 + \ldots + h'm^{n-1} = b' + (c' + d'm + \ldots + h'm^{n-2})\ m$$

luego b' es el resto de dividir dicho cociente por m, y así sucesivamente. Luego los números a', b', c' ..., son los mismos a, b, c, ..., antes hallados.

40. Principio del valor relativo.

Según el teorema anterior, los números a, b, c, ..., h representan los diversos órdenes sucesivos del número N expresado en la base m. Por otra parte, según el mismo teorema, cualquier número N se puede descomponer, de modo único, en la forma [1]. Luego dicho número queda perfectamente determinado conociendo los coeficientes a, b, c, ..., h. Y como éstos son todos menores que m, vienen representados cada uno por una sola cifra. Pues bien, se ha convenido en

representar el número N escribiendo dichas cifras de derecha a izquierda en el mismo orden en que se han ido obteniendo al hacer el cociente:

$$N = h\ g\ \ldots\ c\ b\ a$$

adoptando el siguiente **principio del valor relativo**: *Si escribimos varias cifras sucesivamente, cada cifra representa un conjunto de unidades del orden indicado por el lugar que ocupa en la escritura, contando de derecha a izquierda.*

Así, en el número $N = h\ g\ \ldots\ c\ b\ a$, la cifra a representa las unidades de *primer orden; b,* las de *segundo orden; c,* las de *tercer orden,* etc.

41. Paso de un sistema de numeración a otro.

Sabiendo operar en el sistema decimal, las operaciones en cualquier sistema de base m se reducen a pasar los datos al sistema decimal, operar en este sistema y pasar de nuevo el resultado al sistema antiguo de base m. Es necesario, pues, saber pasar de un sistema a otro.

1.º *Escribir en el sistema decimal un número dado en el sistema de base* m.—Se escribe el número en forma polinómica y se calcula el valor de la suma, haciendo todas las operaciones indicadas en el sistema decimal.

Más práctico que calcular separadamente los diversos sumandos es aplicar sucesivamente las igualdades [2], empezando por la última. Así resulta la siguiente regla: *Se multiplica por la base* m *(escrita en el sistema decimal) la primera cifra de la izquierda,* h, *y se suma después la segunda cifra,* g; *el resultado se multiplica por* m, *y se suma la tercera,* etc.

EJEMPLO.—*Dado el número 1237 en el sistema de base 8, expresarlo en el sistema decimal.*

Solución: Será:

$$1237_{(8} = 1 \cdot 8^3 + 2 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8 + 7 = 512 + 128 + 24 + 7 = 671_{(10}$$

Aplicando la última regla, se obtendría:

$$1 \cdot 8 + 2 = 10 \ ; \ 10 \cdot 8 + 3 = 83 \ ; \ 83 \cdot 8 + 7 = 671_{(10}$$

Estos cálculos se disponen de la forma siguiente:

1	2	3	7
	8	80	664
	10	83	**671**

2.° *Expresar en el sistema de base* m *un número dado en el sistema decimal.*—Basta efectuar las divisiones sucesivas indicadas en el número 38. El último cociente con los restos tomados en orden inverso forman la expresión buscada.

EJEMPLO.—*Dado el número 3827 en el sistema decimal, escribirlo en el de base 12.*

Solución: Efectuamos las divisiones:

3827	12		
22	318	12	
107	78	26	12
11	6	2	2

Designando los números 10 y 11 por las cifras α y β en el sistema de base 12, tendremos que:

$$3827_{(10} = 226\beta_{(12}$$

3.° *Expresar en el sistema de base* m′ *un número dado en el sistema de base* m.—Basta pasar el número dado al sistema decimal (caso 1.°), y de éste al de base *m′* (caso 2.°). Pero sabiendo operar en el sistema de base *m*, puede hacerse el paso directamente. Es lo que aprenderemos en los números siguientes.

42. Adición de números en un sistema de base cualquiera.

1.° *Suma de dos números de una sola cifra.*—Por adición sucesiva de unidades es fácil formar la tabla de sumar en un sistema de base cualquiera. Por ejemplo, en el de base 6, es la siguiente:

0	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	10
2	3	4	5	10	11
3	4	5	10	11	12
4	5	10	11	12	13
5	10	11	12	13	14

Los números de cada fila o columna son iguales a los de la anterior, aumentados en una unidad. La suma de dos cifras cualesquiera se halla en el punto donde se cruzan la columna encabezada por un sumando y la fila que comienza con el otro. Así, $3 + 5 = 12$.

2.° *Suma de un número de varias cifras y otro de una cifra.*—Se tiene, reduciendo a la forma polinómica.

$$hg \ldots cba + r = hm^n + \ldots + cm^2 + bm + (a + r)$$

Si la suma $a + r$ tiene una sola cifra q, la suma total es $hg \ldots cbq$. Pero si $a + r = 1p$ tiene dos cifras, la suma valdrá:

$$hm^n + \ldots cm^2 + bm + (m + p) = hm^n + \ldots + cm^2 + (b + 1)\, m + p$$

Si $b + 1 = s$ tiene una sola cifra, la suma valdrá $hg \ldots csp$. Pero si tiene dos cifras, procediendo del mismo modo se ve que hay que añadir una unidad a la cifra anterior, c, y dejar la cifra de unidades en el segundo lugar, etc.

REGLA.—*Se suma el número* r *a la cifra de las unidades; si la suma tiene una sola cifra, se escribe ésta como cifra de unidades, conservando todas las demás. En caso contrario, se escribe solamente la cifra de las unidades simples, sumando una unidad a la cifra siguiente. El mismo criterio se aplica a esta segunda suma,* etc.

3.º *Sumar varios sumandos cualesquiera.*—Sea la suma

$$h \ldots cba + g_1 \ldots c_1 b_1 a_1 + f_2 \ldots c_2 b_2 a_2 + \ldots$$

que, por la propiedad asociativa, se puede escribir

$$(a + a_1 + a_2 + \ldots) + (b + b_1 + b_2 + \ldots)\, m + \\ + (c + c_1 + c_2 + \ldots)\, m^2 + \ldots$$

Cada una de estas sumas parciales se puede realizar por los casos anteriores; si alguna de ellas da un número de dos o más cifras, se escribe solamente la de unidades simples, y el número formado por las restantes se añade a las unidades de orden inmediato superior.

REGLA.—*Para sumar varios números cualesquiera, se suman las unidades de un mismo orden, comenzando por las unidades simples, y de cada suma parcial se escribe solamente la cifra de las unidades simples, sumando el número que queda a su izquierda con las unidades del orden inmediato superior.*

Conviene escribir en la cabeza de cada columna las cifras de su orden que se le han de sumar, procedentes de columnas anteriores. Dichas cifras se denominan unidades *transportadas*. Por ejemplo, en el sistema de base 6:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\ 1\ 2\ 1\ \ } \\ 3\ 1\ 2\ 4 \\ 5\ 2\ 1\ 5\ 0 \\ 2\ 1\ 5\ 3 \\ 4\ 2\ 0\ 4 \\ \hline 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 5 \end{array}$$

43. Sustracción.

1.° *Todas las cifras del minuendo son iguales o mayores que las del mismo orden del sustraendo.*—Basta restar éstas de sus correspondientes del minuendo, sirviéndose de la tabla de sumar.

2.° *En el sustraendo hay alguna cifra mayor que su correspondiente del minuendo.*—Sea, por ejemplo, b_1 mayor que su correspondiente b; escribiremos

$$h \ldots cba - g_1 \ldots c_1 b_1 a_1 = (a + bm + \ldots + hm^n) -$$
$$- (a_1 + b_1 m + \ldots + g_1 m^p) = [a + (b + m)\, m + \ldots + hm^n] -$$
$$- [a_1 + b_1 m + (c_1 + 1)\, m^2 + \ldots + g_1 m^p]$$

aumentando el minuendo y el sustraendo en m^2 unidades, con lo cual la diferencia no varía. Con la ventaja de que ahora $b + m$ es mayor que b_1, por ser ésta necesariamente menor que m. Luego en esta forma puede hallarse la diferencia $b + m - b_1 = b_2$, siendo ésta de una sola cifra, y por tanto la cifra correspondiente del resto. La siguiente cifra se halla restando $c_1 + 1$ de c, y si no es posible, se aplica el mismo artificio.

Siempre que el minuendo sea mayor que el sustraendo, la sustracción será posible.

REGLA.—*Para restar de un número otro menor, se resta cada cifra de éste de la correspondiente de aquél, comenzando por las de orden inferior. Cuando una cifra del minuendo es menor que su correspondiente del sustraendo, se le suma a aquélla la base del sistema y al mismo tiempo se incrementa en una unidad la cifra siguiente del sustraendo.*

Como ejemplo, sea hallar la diferencia en el sistema de base 7:

$$\begin{array}{r} 5\,4\,2\,6\,0 \\ 3\,5\,6\,2\,1 \\ \hline 1\,5\,3\,3\,6 \end{array}$$

44. Multiplicación.

1.° *Multiplicar dos números de una sola cifra.*—Basta formar la tabla de multiplicar en el sistema de base m. Para ello se escriben en fila las $m - 1$ cifras distintas de *cero*; debajo, sus duplos, es decir, las sumas de cada una consigo misma; debajo, todavía, los triplos,

es decir, la suma de las dos primeras filas, y así sucesivamente. Por ejemplo, para el sistema de base 6:

1	2	3	4	5
2	4	10	12	14
3	10	13	20	23
4	12	20	24	32
5	14	23	32	41

El producto de dos cifras cualesquiera se halla en el punto donde se cruzan la columna encabezada por un sumando y la fila que comienza con el otro.

2.º *Multiplicar un número cualquiera por otro de una sola cifra.* Sea el multiplicando $N = h \ldots cba$, y el multiplicador a', de una sola cifra. Se tiene:

$$N \cdot a' = (a + bm + cm^2 + \ldots) \cdot a' = aa' + ba'm + ca'm^2 + \ldots$$

O sea, según la ley distributiva de la multiplicación, se multiplica cada cifra del multiplicando por la cifra del multiplicador. Si aa' tiene una sola cifra, se escribe ésta, y si tiene dos, o sea, es

$$aa' = s \cdot m + t$$

se escribe la segunda cifra, t, y se reserva la primera, s, para sumarla a la columna anterior.

REGLA.—*Se multiplica el número de una cifra por cada cifra del multiplicando, comenzando por las unidades simples. Si el producto es un número de una sola cifra, se escribe ésta; y si es de dos cifras, se escribe sólo la de las unidades simples, conservando la otra para sumarla con el producto siguiente.*

3.º *Multiplicar dos números cualesquiera.*—Sea el multiplicando un número cualquiera N, y el multiplicador el número $N' = h \ldots cba$. Se tendrá

$$N \cdot N' = N(a + bm + cm^2 + \ldots + hm^n) = Na + Nbm + \\ + Ncm^2 + \ldots + Nhm^n$$

Por tanto basta hallar los productos Na, Nb, Nc, ..., añadir un cero a la derecha del segundo, dos ceros a la derecha del tercero, etc., y sumarlos. Prácticamente esto equivale a la siguiente

REGLA.—*Se multiplica el multiplicando por la cifra de las unidades simples del multiplicador; se escriben debajo los productos del multiplicando por la segunda, tercera, etc., cifras del multiplicador,*

corridos uno, dos, etc., lugares a la izquierda, y se suman estos productos parciales.

EJEMPLO.—*Calcular el producto* $1254_{(6} \cdot 321_{(6}$.

$$\begin{array}{r} 1\ 2\ 5\ 4 \\ 3\ 2\ 1 \\ \hline 1\ 2\ 5\ 4 \\ 2\ 5\ 5\ 2 \\ 4\ 2\ 5\ 0 \\ \hline 5\ 0\ 0\ 2\ 1\ 4 \end{array}$$

El producto es $\mathbf{500214}_{(6}$.

45. División entera.

1.° *El cociente tiene una sola cifra, y el divisor otra.*—Entonces el dividendo tendrá una sola cifra, o a lo más dos. Para hallar el cociente q, basta ver en la tabla de multiplicar cuál es el mayor número que, multiplicado por el divisor d, nos da un producto igual o menor que el dividendo D. Será, pues,

$$D = d \cdot q + R$$

llamando R, o *resto*, a la diferencia entre el dividendo y el producto $d \cdot q$. O sea

$$R = D - d \cdot q$$

2.° *El cociente tiene una sola cifra.*—Sea q dicha cifra. Tomemos en el dividendo D la primera o las dos primeras cifras de modo que formen un número D_1 mayor que el número formado por la primera cifra d_1 del divisor. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ las cifras restantes del dividendo, comenzando a contar por la izquierda, y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ las cifras restantes del divisor. Se tendrá

$$D_1 \cdot m^n + a_1 \cdot m^{n-1} + a_2 \cdot m^{n-2} + \ldots + a_n = q\,(d_1 \cdot m^n + b_1 m^{n-1} + b_2 \cdot m^{n-2} + \ldots + b_n) + R$$

Las unidades de orden n en el primer miembro están representadas por $D_1 \cdot m^n$, y en el segundo miembro por $q \cdot d_1 m^n$, más las que puedan provenir de $q \cdot b_1 m^{n-1}$, si $qb_1 > m$. Luego evidentemente

$$D_1 m^n \geqslant q d_1 m^n; \quad D_1 \geqslant q d_1$$

O sea

$$q \leqslant \frac{D_1}{d_1}$$

Podemos, pues, enunciar: *Si se divide el número* D_1 *por el* d_1, *y es* q' *el cociente, se verifica que* $q \leqslant q'$.

Este teorema nos da un límite superior para la cifra del cociente. Basta, pues, ensayar comenzando con la cifra q', y rebajando de unidad en unidad hasta que el producto por el divisor resulte menor o igual que el dividendo.

Así en el sistema de base 6 el cociente de $2154_{(6}$ por $325_{(6}$ es un número de una sola cifra. Dividendo 21 entre 3 (tabla de multiplicar del número 44) obtenemos como cociente 4. Luego la cifra buscada es a lo más 4. Multiplicando ésta por el divisor, resulta

$$325_{(6} \cdot 4_{(6} = 2152_{(6}$$

que es menor que el dividendo. El cociente es 4 y el resto 2.

3.º *Caso general.*—Sea D el dividendo y d el divisor. A partir de la izquierda tomemos un número de cifras en D tal que el número que forman, D_1, sea el primero que obtengamos mayor que d (para lo cual tendrá el mismo número de cifras que d, o una más). Supongamos que el número de cifras sobrantes en D sea n, y llamémoslas $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, comenzando por la izquierda. Llamemos $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{n+1}$, las diversas cifras del cociente, comenzando también por la izquierda. Tendremos

$$D_1 \cdot m^n + a_1 \cdot m^{n-1} + a_2 \cdot m^{n-2} + \ldots + a_n = d\,(q_1 \cdot m^n + q_2 \cdot m^{n-1} + \ldots + q_{n+1}) + R \qquad [3]$$

de donde se deduce que

$$D_1 \cdot m^n \geqslant d \cdot q_1 \cdot m^n$$

ya que el primer miembro contiene todas las unidades de orden n de D, mientras que en el segundo miembro puede haber alguna en los otros sumandos, si $dq_2 > m$, o $dq_3 > m^2$, etc. Por tanto

$$D_1 \geqslant d \cdot q_1; \quad q_1 \leqslant \frac{D_1}{d}$$

Luego, para hallar q_1, se divide D_1 por d, y se comprueba rebajando su valor de unidad en unidad hasta llegar al verdadero. Entonces es

$$D_1 = d \cdot q_1 + R_1$$

El resto R_1 representa las unidades de orden n que provienen de los términos $d\,(q_2 m^{n-1} + q_3 m^{n-2} + \ldots + q_{n+1})$.

En consecuencia será, restando $d\ q_1 m^n$ de los dos miembros de [3],

$$R_1 \cdot m^n + a_1 \cdot m^{n-1} + \ldots + a_n = d\ (q_2\ m^{n-1} + \ldots + q_{n+1}) + R$$

o sea

$$(R_1 m + a_1)\ m^{n-1} + \ldots + a_n = dq_2 m^{n-1} + d\ (q_3 m^{n-2} + \ldots + q_{n+1}) + R$$

Nos encontramos así con un caso análogo al anterior, habiendo de ser

$$R_1 m + a_1 \geqslant dq_2; \quad q_2 \leqslant \frac{R_1 m + a_1}{d}$$

Se divide $R_1 a_1$ por d, y se obtiene un cociente igual a q_2, o mayor, por lo que se prueba. Se continúa del mismo modo hasta concluir la operación. De aquí la

REGLA.—*Se separa en el dividendo el menor número* D_1 *que sea mayor que* d; *se divide* D_1 *por* d, *y el cociente obtenido se prueba multiplicándolo por todo el divisor y viendo si el producto es igual o menor que* D_1; *se rebaja de unidad en unidad hasta que lo sea. Se resta entonces el producto de* D_1 *y al resto* R_1 *se le agrega la primera cifra* a_1 *del dividendo, que sigue a* D_1. *Se procede con este número como con* D_1, *y así se continúa hasta obtener un resto que sea menor que el divisor.*

Si en alguna división parcial sucede que al escribir la cifra siguiente a la derecha del resto, el número obtenido es todavía menor que el divisor, la nueva cifra del cociente es 0, y el resto es el mismo número.

Como ejemplo damos la siguiente división en el sistema de base 6:

120543	342
414	210
323	

Método práctico.—Se comienza por escribir los productos del divisor 342 por 1, 2, 3, 4 y 5:

$342 \cdot 1 = 342$
$342 \cdot 2 = 1124$
$342 \cdot 3 = 1510$
$342 \cdot 4 = 2252$
$342 \cdot 5 = 3034$

120543	342
1124	210
414	
342	
323	

El mayor de los productos que es inferior a 1205 es $342 \cdot 2 = 1124$. Luego el primer cociente parcial es 2 y el primer resto parcial 41. El único producto inferior a 414 es $342 \cdot 1 = 342$. Luego el segundo cociente parcial es 1 y el segundo resto 32. No hay ningún producto inferior a 323. Luego el tercer cociente parcial es 0, y el resto 323.

EJERCICIOS

1. Sumar en el sistema de base 7 : 3440 + 32521 + 142605.
2. Hallar la diferencia $13845\beta - 9\alpha654$ en el sistema de base 12.
3. Efectuar el producto 12734×4580 en el sistema de base 9.
4. Efectuar el cociente 123745 : 670 en el sistema de base 8.
5. Expresar en el sistema de base 12 el número 34216 de base 10.
6. Expresar en el sistema decimal el número 17974, dado en la base 11.
7. En qué base el número 136335, dado en la base 9, viene expresado por el número 40305 (expresar ambos números en forma polinómica, e igualarlos, despejando x, la base nueva).
8. Dado el número 0'4526 en la base 7, hallar su expresión en la base 10 (poner el número en la forma: $4 \cdot 7^{-1} + 5 \cdot 7^{-2} + 2 \cdot 7^{-3} + 6 \cdot 7^{-4}$, y efectuar estas operaciones).
9. El número $0'\overset{\frown}{33}$, dado en el sistema decimal, expresarlo en el sistema de base 6 (poner primero el número en forma de fracción ordinaria, y luego hacer la división en el sistema de base 6).
10. Dada una colección de pesas de 1 Kg., 4 Kg., 16 Kg., 64 Kg., etc., pesar con ellas una Tm. empleando el menor número posible de pesas.
11. Dada una colección de pesas de 1 Kg., 2 Kg., 4 Kg., 8 Kg., etc., pesar con ellas una Tm. empleando sólo una de cada clase, como máximo.
12. Escribir en base 5 los números del sistema decimal: 26, 108, 345, 1288.
13. Dado el número 0'2436 en la base 8, expresarlo en la forma decimal.
14. Dado el número 0'234 en la base 6, expresarlo en la base 10.
15. ¿En qué sistema de numeración el número 1902, de base decimal, se escribirá 30102?
16. ¿En qué base debe escribirse el número 127 del sistema decimal, para que se convierta en el 1002?
17. ¿Cuántos números de tres cifras hay en el sistema de base 6? (Observar que la cifra de la izquierda tiene que ser significativa.)
18. Escribir en el sistema de base 5 la serie natural de los números hasta el 44. Efectuar en dicho sistema la suma 341 + 123 + 434 y el producto 324×243.
19. Hallar la diferencia de los números $1\alpha30$ y 68β, escritos en el sistema de base 12.
20. Averiguar cuál es la base del sistema de numeración en que está escrito el número 3157, que tiene como equivalente en el sistema decimal el número 6832.
21. Hallar el cociente completo de la división $\frac{13534}{434}$, estando escritos los datos en el sistema de numeración de base 7, y expresando el resultado en la misma base

4

EL NUMERO ENTERO

46. Necesidad de ampliar el campo de los números naturales.

Tratamos de resolver la ecuación

$$x + b = a \qquad [1]$$

dentro del campo N de los números naturales, siendo a y b números tales. Pueden ocurrir dos casos:

1.° $a \geqslant b$: entonces $x = a - b$ es un número natural, y la ecuación [1] tiene solución.

Es evidente que el número natural x puede entonces expresarse por la diferencia $a - b$, o simplemente por la pareja (a, b) de números naturales. Pero hay otras muchas parejas que también representan al número x. Son todas aquellas parejas (a', b') que satisfacen la condición

$$a - b = a' - b' \quad ; \quad \text{o sea} \quad a + b' = a' + b \qquad [2]$$

2.° $a < b$: entonces $x = a - b$ carece de sentido dentro del campo de los números naturales, y la ecuación [1] no tiene solución.

Se advierte la necesidad de crear unos nuevos entes o números que permitan dar solución en todos los casos a la ecuación [1]. Estos entes van a ser todas las parejas (a, b), elementos del producto cartesiano $N \times N$, pero con la condición de equivalencia [2]. Daremos, pues, la siguiente definición general:

47. Relación de equivalencia en el conjunto producto $N \times N$.

Dos elementos (a, b) *y* (a', b') *del conjunto producto* N × N *son equivalentes si se tiene*

$$a + b' = b + a' \qquad [2']$$

Se expresa así:

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a + b' = b + a'$$

Se trata, en efecto, de una *relación de equivalencia,* ya que es:

1.°, *reflexiva:* $(a, b) = (a, b)$

puesto que

$$a + b = b + a$$

en virtud de la propiedad I del número 29.

2.°, *simétrica:* si $(a, b) = (a', b') \Rightarrow (a', b') = (a, b)$

puesto que

$$a + b' = b + a' \Rightarrow a' + b = b' + a$$

3.°, *transitiva:* si $(a, b) = (a', b')$ y $(a', b') = (a'', b'') \Rightarrow (a, b) = (a'', b'')$

puesto que

$$\left.\begin{array}{l} a + b' = b + a' \\ a' + b'' = b' + a'' \end{array}\right\} \Rightarrow a + b' + a' + b'' = b + a' + b' + a''$$

es decir,

$$a + b'' = b + a''$$

48. Definición de número entero.

La relación de equivalencia anterior divide al conjunto $N \times N$ en *clases de equivalencia. Cada clase de equivalencia se denomina* NÚMERO ENTERO.

Un número entero viene definido por uno cualquiera de los representantes de su clase, o sea, por *un par de números naturales dados en un orden determinado.*

EJEMPLOS:

$$\alpha = (12, 9) = (6, 3) = (5, 2) = (4, 1) = (3, 0)$$
$$\beta = (8, 10) = (4, 6) = (2, 4) = (1, 3) = (0, 2)$$
$$\gamma = (10, 10) = (8, 8) = (4, 4) = (2, 2) = (0, 0)$$

α, β, γ son números enteros.

Al conjunto cociente $\frac{N \times N}{R}$ siendo R la relación de equivalencia, o sea, al conjunto de las clases de equivalencia, le llamaremos *conjunto Z de los números enteros.*

49. Representantes canónicos de los números enteros.

En los ejemplos anteriores observamos que los representantes más sencillos de los números enteros α, β y γ son aquellos que tienen alguna componente nula, como el (3,0), el (0,2) o el (0,0).

Estos representantes se denominan *formas canónicas* de las clases, o *elementos canónicos* de los números enteros respectivos. En general, pueden ocurir tres casos:

1.°) Si $a > b$

$$\alpha = (a, b) = (a, -b, 0) = (m, 0) \quad , \quad m \in N$$

2.°) Si $a < b$

$$\alpha = (a, b) = (0, b - a) = (0, n) \quad , \quad n \in N$$

3.°) Si $a = b$

$$\alpha = (a, b) = (0, 0)$$

es decir, cualquier número entero puede representarse por una de estas tres *formas canónicas*

$$(m, 0) \quad , \quad (0, n) \quad , \quad (0, 0)$$

50. Números enteros positivos, negativos y nulo.

Los números enteros cuyo elemento canónico es de la forma $(m, 0)$ se denominan *positivos*, y se representan por

$$(m, 0) = + m$$

Los que tienen elemento canónico de la forma $(0, n)$ se llaman *negativos*, y se representan así:

$$(0, n) = - n$$

Aquel entero cuyo elemento canónico es (0, 0) se denomina *cero*, y se representa abreviadamente por

$$(0, 0) = 0$$

Tenemos, pues, el conjunto Z clasificado en:

Z^+: Subconjunto de los enteros positivos ($+ m$)
Z^-: Subconjunto de los enteros negativos ($- n$)
0 : Entero *nulo* o cero (0, 0)

En las denominaciones anteriores, los signos + y — son simplemente signos *predicativos;* indican una cualidad: el ser positivos o negativos. No han de confundirse con los signos + y — de la adición y sustracción. Lo mismo se hubieran podido tomar cualesquiera otros.

51. Representación gráfica de los números enteros.

Tomando en una recta un punto 0 como origen (fig. 15), este punto va a representar el número *cero*. Tomando a su derecha pun-

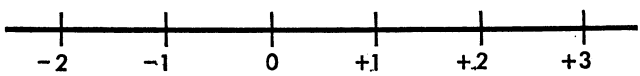


FIGURA 15

tos equidistantes, éstos representan los números + 1, + 2, + 3, etc., y tomando a su izquierda puntos equidistantes, éstos convenimos que representen los números negativos — 1, — 2, — 3, etc.

Suele darse también la siguiente representación: tomamos dos ejes perpendiculares, anotando sobre cada uno el conjunto N de los números naturales; formamos el conjunto producto $N \times N$, que está representado por los puntos de la red (fig. 15 b).

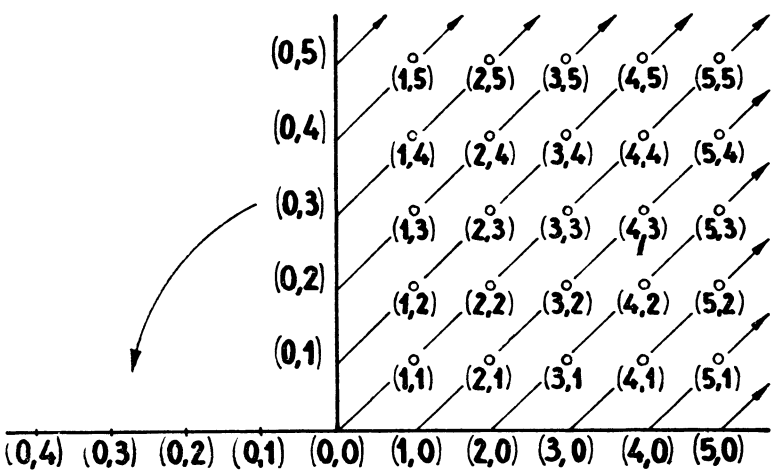


FIGURA 15 b

Las clases de equivalencia aparecen sobre las rectas de la figura. Los elementos canónicos están colocados sobre los ejes.

Girando 90° el eje vertical, tal como se indica, tenemos en el eje horizontal la representación dada en la figura 15.

52. Adición de números enteros.

Cuando se trata de números naturales definidos por los pares $(a, b) = a - b$ y $(c, d) = c - d$, se tiene

$$(a, b) + (c, d) = a - b + c - d = a + c - (b + d) = \\ = (a + c, b + d)$$

Una vez definidos los números enteros, se han de definir igualmente las operaciones con los mismos. Dichas definiciones podían ser completamente arbitrarias, pero con el fin de que la Aritmética no sea contradictoria y, por otra parte, para darle sencillez y armonía, se exigen de ellas las dos condiciones siguientes:

1.ª Las operaciones en el nuevo campo ampliado han de satisfacer a las mismas leyes formales que en el sistema anteriormente estudiado.

2.ª Cuando los números pertenezcan a éste, como caso particular, las nuevas operaciones han de coincidir con las definidas anteriormente.

Estas dos condiciones forman el *principio de permanencia de las leyes formales.*

En virtud de este principio, parece, pues, natural que definamos de un modo general para números enteros cualesquiera

$$\mathbf{(a, b) + (c, d) = (a + c \ , \ b + d)} \qquad [3]$$

Para que esta definición sea válida, y sirva para definir sumas de enteros, es preciso que cualesquiera que sean los representantes elegidos para los enteros de los sumandos, la suma sea la misma, es decir, las sumas obtenidas sean representantes del mismo número entero.

Y, en efecto, sean (a', b') y (c', d') otros representantes de los enteros anteriores, o sea,

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a + b' = b + a'$$
$$(c, d) = (c', d') \Leftrightarrow c + d' = d + c'$$

Sumando las dos últimas igualdades

$$a + b' + c + d' = b + a' + d + c'$$

o sea

$$(a + c) + (b' + d') = (b + d) + (a' + c') \Leftrightarrow (a + c, b + d) = \\ = (a' + c', b' + d')$$

es decir,

$$(a, b) + (c, d) = (a', b') + (c', d')$$

Esta es la *propiedad uniforme* de la adición de enteros, que permite definir: *Suma de dos enteros definidos por las clases* (a, b) *y* (c, d) *es el entero correspondiente a la clase* (a + c, b + d).

53. Consecuencias.

Ya que la suma es independiente de los representantes elegidos, vamos a tomar los más sencillos, esto es, los elementos canónicos, obteniendo los siguientes resultados:

a) *La suma de dos números positivos es otro también positivo.*

$$(m, 0) + (m_1, 0) = (m + m_1, 0)$$

o sea

$$+ m + (+ m_1) = + (m + m_1)$$

b) *La suma de dos números negativos es otro también negativo.*

$$(0, n) + (0, n_1) = (0, n + n_1)$$

o sea

$$- n + (- n_1) = - (n + n_1)$$

c) *Suma de dos números de distinto signo.*

$$(m, 0) + (0, n) = (m, n)$$

y entonces pueden ocurrir tres casos:

I. $m > n$; $(m, n) = (m - n, 0) = + (m - n)$
La suma es *positiva.*

II. $m < n$; $(m, n) = (0, n - m) = - (n - m)$
La suma es *negativa.*

III. $m = n$; $(m, n) = (0, 0) = 0$
La suma es el número *cero.*

Se llama *módulo* o *valor absoluto* de un número entero $(m, 0)$ o $(n, 0)$ al número natural m o n, respectivamente.

Para sumar dos números positivos o dos negativos se suman sus valores absolutos y se conserva el signo de aquéllos.

Para sumar un número positivo y otro negativo se restan sus valores absolutos, y se pone a la diferencia el signo del número de mayor valor absoluto.

54. Propiedades de la adición de números enteros.

I. *Conmutativa.*—La suma es independiente del orden de los sumandos:

$$(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b)$$

ya que

$$(a + c, b + d) = (c + a, d + b)$$

en virtud de la propiedad conmutativa de los números naturales.

II. *Asociativa.*

$$[(a, b) + (c, d)] + (e, f) = (a, b) + [(c, d) + (e, f)]$$

ya que ambas sumas valen

$$(a + c + e, b + d + f)$$

III. *Existencia del elemento neutro.*—La adición de un entero cualquiera y el número cero deja invariable a aquél, o sea

$$(a, b) + (0, 0) = (a, b)$$

Por eso, al número cero se le denomina *elemento neutro* de la adición.

IV. *Existencia del elemento simétrico.*—Dado un conjunto C y definida en él una operación, que denotaremos con $\perp$, se denomina elemento *simétrico* de un elemento cualquiera α, a otro elemento α', tal que

$$\alpha \perp \alpha' = \varepsilon$$

o sea, aplicada la operación $\perp$ sobre ambos elementos α y α' da como resultado el elemento neutro ε.

Veamos si para la adición de enteros existe elemento simétrico de cualquier elemento. Sea $\alpha = (a, b)$ un elemento cualquiera y $\alpha' = (c, d)$ su simétrico, que en el caso de la adición se denomina *opuesto*. Ha de ser

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (0, 0) = (m, m)$$

La solución más sencilla es

$$a + c = b + d \quad ; \quad c = b,\ d = a$$

O sea, *el opuesto de un número entero* $\alpha = (a, b)$ *existe siempre y es único: es el entero* $\alpha' = (b, a)$. En efecto

$$(a, b) + (b, a) = (a + b, a + b) = (0, 0)$$

Al opuesto de un número entero α lo representaremos por $-\alpha$, es decir, $\alpha + (-\alpha) = 0$.

Este importante resultado nos va a permitir *simetrizar* la adición y hacer siempre posible la sustracción.

55. Sustracción de números enteros.

Restar dos números enteros α y β, llamados *minuendo* y *sustraendo*, respectivamente, es hallar otro número entero γ, llamado *diferencia*, que sumado al sustraendo β nos dé el minuendo α, o sea

$$\alpha - \beta = \gamma \Leftrightarrow \beta + \gamma = \alpha \qquad [4]$$

Sumemos a los dos miembros de la segunda igualdad [4] el número opuesto al β, o sea, $-\beta$. Resulta

$$\beta + (-\beta) + \gamma = \alpha + (-\beta)$$

Pero $\beta + (-\beta)$ es el elemento neutro. Luego queda

$$\gamma = \alpha + (-\beta) \qquad [5]$$

que nos dice: 1.° *La sustracción de números enteros es siempre posible.*

2.° *Para restar dos números enteros se suma al minuendo el opuesto al sustraendo.*

EJEMPLO:

$$+ 2 - (+ 7) = (2, 0) - (7, 0) = (2, 0) + (0, 7) = + 2 + (- 7) = - 5$$

Por tanto, la sustracción no existe como operación independiente en el conjunto Z de los números enteros: equivale a una adición. Tenemos así la curiosa paradoja de que al tratar de dar solución al problema de la sustracción, introduciendo el concepto de número entero, lo que conseguimos es hacer desaparecer la operación de la sustracción.

56. Concepto de grupo.

Todo conjunto C en el que se ha definido una ley de composición interna, que designaremos por $\perp$, que tenga las siguientes propiedades:

1.ª *Uniforme:* el conjunto es *cerrado* respecto a dicha operación; de dos elementos α y β se obtiene siempre el mismo γ que también pertenece al conjunto C

$$\alpha \perp \beta = \gamma$$

2.ª *Asociativa* $(\alpha \perp \beta) \perp \gamma = \alpha \perp (\beta \perp \gamma)$

3.ª *Existencia del elemento neutro* ε, tal que

$$\alpha \perp \varepsilon = \alpha$$

4.ª *Existencia del elemento simétrico* α' de todo elemento α, tal que

$$\alpha \perp \alpha' = \varepsilon$$

se dice que tiene *estructura de grupo* o simplemente que es un *grupo.*

Si además tiene la propiedad *conmutativa*

$$\alpha \perp \beta = \beta \perp \alpha$$

se dice que es un *grupo abeliano* o *conmutativo.*

57. Grupo aditivo de los números enteros.

De las propiedades del número 54 deducimos que:

El conjunto Z *de los números enteros es un grupo conmutativo respecto a la operación de adición,* o más sencillamente, *es un grupo aditivo.*

58. Isomorfismo entre los semigrupos $\{N, 0; +\}$ y $\{Z^+, 0; +\}$.

Con la notación $\{N, 0; +\}$ designamos el conjunto de los números naturales y el cero, provisto de la operación de adición. Y con la notación $\{Z^+, 0; +\}$ designamos el conjunto de los enteros positivos y el cero, provisto de la operación de adición. Son dos conjuntos distintos, pero podemos establecer entre ellos una correspondencia biunívoca, tomando como homólogo del número natural a el entero positivo $+ a = (a, 0)$; además, el homólogo del natural 0 es el entero $(0, 0)$.

Representemos esta correspondencia así:

$$f(a) = (a, 0)$$

Se verifica entonces

$$f(a) = (a, 0)$$
$$f(b) = (b, 0)$$
$$f(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = f(a) + f(b)$$

O sea, el homólogo de la suma $a + b$ es igual a la suma de los homólogos $f(a) + f(b)$. Se dice que la correspondencia *conserva la adición.*

Toda correspondencia biunívoca que cumpla esta propiedad se llama *isomorfismo.*

Aunque los números naturales y los enteros positivos son de distinta naturaleza, el isomorfismo indicado nos autoriza a considerar ambos conjuntos como idénticos frente a la operación de adición, y a tomar unos por otros, escribiendo, por ejemplo:

$$(+ a) + (+ b) = a + b$$

Se dice que se ha *sumergido* el conjunto N de los números naturales en el conjunto Z de los números enteros mediante la identificación $a = (a, 0)$. Así, pues,

El semianillo N *es una parte del anillo* Z *de los números enteros.*

59. Multiplicación de números enteros.

Cuando se trata de números naturales definidos por los pares $(a, b) = a - b$, y $(c, d) = c - d$, se tiene

$$(a, b) \times (c, d) = (a - b) \cdot (c - d) = (ac + bd) - (bc + ad) = (ac + bd, bc + ad)$$

Para que se cumpla el principio de permanencia de las leyes formales, parece, por tanto, natural que definamos para números enteros cualesquiera

$$\mathbf{(a, b) \times (c, d) = (ac + bd, bc + ad)} \qquad [6]$$

Vamos a demostrar que esta operación inicialmente definida en el conjunto $N \times N$ es *estable* frente a la relación de equivalencia R, o sea, que es una operación definida en el conjunto Z, independiente de los representantes elegidos en cada clase. En efecto, sean (a', b') y (c', d') otros representantes de los enteros anteriores, o sea

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a + b' = b + a'$$
$$(c, d) = (c', d') \Leftrightarrow c + d' = d + c'$$

Multiplicando sucesivamente la primera por c y d, y la segunda por a' y b', obtenemos

$$\begin{aligned} ac + b'c &= bc + a'c \\ bd + a'd &= ad + b'd \\ a'c + a'd' &= a'd + a'c' \\ b'd + b'c' &= b'c + b'd' \end{aligned}$$

- Sumando estas cuatro y suprimiendo términos iguales, resulta

$$ac + bd + a'd' + b'c' = bc + ad + a'c' + b'd'$$

lo que implica

$$(ac + bd, bc + ad) = (a'c' + b'd', a'd' + b'c')$$

o sea

$$(a, b) \times (c, d) = (a', b') \times (c' d')$$

Los productos obtenidos son representantes del mismo número entero. Esta es la *propiedad uniforme* de la multiplicación de enteros, que permite definir:

Producto de los enteros definidos por las clases (a, b) *y* (c, d) *es el correspondiente a la clase* (ac + bd, bc + ad).

60. Consecuencias: regla de los signos.

Según lo anterior, para multiplicar enteros podemos utilizar sus correspondientes elementos canónicos, obteniendo los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} (+ m) \cdot (+ n) &= (m, 0) \cdot (n, 0) = (m\,n, 0) = + m \cdot n \\ (+ m) \cdot (- n) &= (m, 0) \cdot (0, n) = (0, m\,n) = - m \cdot n \\ (- m) \cdot (+ n) &= (0, m) \cdot (n, 0) = (0, m\,n) = - m \cdot n \\ (- m) \cdot (- n) &= (0, m) \cdot (0, n) = (m\,n, 0) = + m \cdot n \end{aligned}$$

igualdades que constituyen la conocida *regla de los signos* de multiplicar números enteros.

61. Propiedades de la multiplicación de números enteros.

I'. *Conmutativa.*

$$(a, b) \cdot (c, d) = (c, d) \cdot (a, b)$$

Puesto que

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot (c, d) &= (ac + bd, ad + bc) = (ca + db, cb + da) = \\ &= (c, d) \cdot (a, b) \end{aligned}$$

II'. *Asociativa.*

$$[(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f) = (a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)]$$

ya que ambos productos valen

$$(ace + adf + bcf + bde, acf + ade + bce + bdf)$$

III'. *Existencia del elemento neutro.*—Este elemento es el número entero $(1, 0) = +1$. Se tiene, en efecto

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (a, b)$$

Se le llama elemento *unidad.*

Ya que los elementos del *conjunto Z* carecen, en general, de elemento simétrico, respecto a la multiplicación, no forman grupo. Constituyen un *semigrupo multiplicativo con elemento unidad.*

62. Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición.

Se tiene

$$(m, n) \cdot [(a, b) + (c, d)] = (m, n) \cdot (a + c, b + d) = \\ = (ma + mc + nb + nd, na + nc + mb + md)$$

y por otra parte

$$(m, n)\,(a, b) + (m, n) \cdot (c, d) = (ma + nb, na + mb) + \\ + (mc + nd, nc + md) = (ma + nb + mc + nd, na + \\ + mb + nc + md)$$

Por tanto: IV'. *Propiedad distributiva.*

$$(m, n)\,[(a, b) + (c, d)] = (m, n)\,(a, b) + (m, n)\,(c, d)$$

La multiplicación es distributiva respecto a la adición.

63. Concepto de anillo.

Se llama *anillo* a todo conjunto C en el que se puedan definir dos operaciones o leyes de composición interna distintas, y tales que 1.º), respecto a la primera operación forme un "grupo abeliano"; 2.º), respecto a la segunda operación constituya un "semigrupo", y 3.º), la segunda operación sea distributiva respecto a la primera. Si, además, la segunda operación tiene las propiedades conmutativa y existencia del elemento neutro, se dice que es un *anillo conmutativo con elemento unidad.*

64. El anillo Z de los números enteros.

Por cumplir las propiedades I, II, III y IV del número 54 y las I', II', III' y IV' de los números 61 y 62, *el conjunto Z de los números enteros es un anillo conmutativo con elemento unidad.*

65. Isomorfismo de los conjuntos N y Z^+ respecto a la multiplicación.

La correspondencia biunívoca definida en el número 58 entre los conjuntos N y Z^+ es también un isomorfismo respecto a la multiplicación, ya que si $f(a) = (a, 0)$ y $f(b) = (b, 0)$, se tiene

$$f(a \cdot b) = (a \cdot b, 0) = (a, 0) \cdot (b, 0) = f(a) \cdot f(b)$$

El homólogo del producto $a \cdot b$ es igual al producto de los homólogos $f(a) \cdot f(b)$.

La correspondencia *conserva el producto.*

Este isomorfismo permite identificar los dos conjuntos N y Z^+ frente a la operación de multiplicar, y sustituir uno por otro.

EJERCICIOS

1. Las ecuaciones
$$a + x = b \quad ; \quad a \cdot x = b$$
¿tienen siempre solución en Z?

2. Calcula las sumas siguientes:
   a) $(+ 5) + (- 3) + (- 7) + (+ 8) + (- 2)$
   b) $(- 4) + (- 9) + (+ 11) + (+ 6) + (- 8)$

3. Efectúa las sustracciones siguientes:
   a) $(+ 8) - (+ 3)$ c) $(- 6) - (+ 5)$
   b) $(+ 5) - (- 7)$ d) $(- 11) - (- 9)$

4. Calcula las sumas algébricas siguientes:
   a) $(- 4) - (- 8) + (+ 5) - (+ 7) + (- 11)$
   b) $(+ 5) + (- 4) - (- 6) - (+ 2) + (- 9)$
   c) $(- 3) - [(+ 4) - (- 6) + (- 1)] + [(+ 5) - (- 8)] - (+ 9)$

5. Calcula el número A definido por la expresión
$$A = (- 5) \cdot (- 7) \cdot (+ 2) - (+ 3) \cdot (- 8) + (- 7) \cdot (0)$$

6. Halla el valor de la expresión
$$B = x^4 - 2x^3 - 33x^2 - 2x + 1$$
para $x = - 2$.

7. En el conjunto Z, ¿es la adición distributiva respecto a la multiplicación?

8. Se considera en Z la ley de composición interna

$$a \perp b = a + 2ab + b$$

¿Es conmutativa? ¿Es asociativa? ¿Posee elemento neutro?

9. Sea en el conjunto Z la ley de composición interna

$$a \perp b = 2ab$$

a) ¿Cuáles son sus propiedades? b) Dicha ley, ¿es distributiva respecto a la adición en Z? ¿Y respecto a la multiplicación en Z?

10. Se considera en Z la ley de composición interna

$$a \perp b = a + b + ab$$

a) Estudiar las propiedades de esta ley.
b) ¿Es distributiva respecto de la adición en Z? ¿Y respecto de la multiplicación en Z?
c) ¿Cuáles son los elementos simetrizables, o sea, que admiten elemento simétrico?

11. ¿Qué propiedad falta al conjunto N de los números naturales para tener la estructura de *grupo aditivo?*

12. El conjunto de los números pares $2n$, siendo n = entero cualquiera, ¿tiene estructura de *grupo aditivo?*

13. El conjunto de los números impares $2n + 1$ (n = entero cualquiera), ¿es un *grupo aditivo?*

14. El conjunto de los números pares $2n$, ¿es un *anillo conmutativo?*

15. Demuestra que el conjunto cuyos elementos son polinomios en x de cualquier grado con coeficientes enteros tiene estructura de *anillo conmutativo.*

16. Demuestra que la igualdad

$$a + x = b \quad , \quad a, b, x \in Z \ (x \geqslant 0)$$

establece una relación de orden total en Z que expresamos en la forma

$$a \leqslant b$$

Expresa las consecuencias que se deducen de dicha ordenación.

17. El conjunto $C = \{a, b, c\}$ es un grupo abeliano respecto a una operación $\perp$. Forma la tabla de dicha operación.

18. Considera un triángulo equilátero ABC (figura 16) y todos los giros de centro el centro O del triángulo que le hacen coincidir consigo mismo. Demuestra que dichos giros forman grupo, definiendo como producto de dos giros al giro único que produce el mismo efecto que ambos.

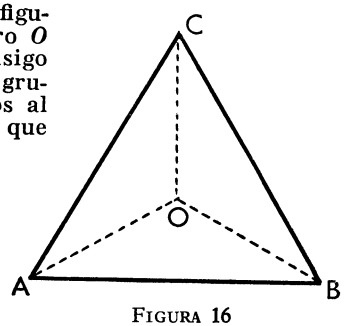


FIGURA 16

TEORIA DE LA DIVISIBILIDAD NUMERICA

66. La división exacta y la división entera.

El problema de hallar una solución de la ecuación

$$ax = b$$

solamente tiene solución en el anillo Z de los números enteros cuando b es el producto de a por otro número entero. A dicho número x, si existe. le llamaremos *cociente exacto* de b por a, y a la operación que permite obtener x a partir de b y a la denominaremos *división exacta*, y se representa

$$x = \frac{b}{a} \Leftrightarrow a \cdot x = b$$

Caso de que no exista un número entero x que multiplicado por a dé b, procederemos a hallar dos enteros consecutivos, q y $q + 1$, tales que

$$aq < b < a\,(q + 1)$$

lo cual siempre es posible. Llamando *resto* r al número

$$r = b - aq > 0 \quad ; \quad 0 < r < |a|$$

y *cociente entero* al número q, la operación que permite hallar q y r a partir de a y b se denomina *división entera*. Se verifica entonces que

$$b = aq + r \quad ; \quad 0 < r < |a|$$

Ejemplos:

$$-10 = 3\,(-4) + 2 \quad ; \quad 2 < 3$$
$$24 = 5 \cdot 4 + 4 \quad ; \quad 4 < 5$$

67. Divisibilidad en el semianillo N de los números naturales.

En el conjunto N de los números naturales definimos la siguiente relación binaria: "a *divide a* b *si la división de* b *por* a *es exacta*". Se representa

$$a \mid b \Leftrightarrow b = a \cdot q \quad ; \quad q \in N$$

También se dice que a es *divisor* o *factor* de b, y que b es *múltiplo* de a, o que es *divisible* por a.

EJEMPLOS:

$$7 \mid 35 \ , \text{ porque } 35 = 7 \cdot 5$$
$$9 \mid 63 \ , \text{ porque } 63 = 9 \cdot 7$$

La relación precedente indicada por /, *introduce en* N *una relación de orden parcial.*

En efecto, posee las propiedades siguientes:

1.ª *Reflexiva:* cualquiera que sea a, a divide a a

$$(\forall a) \ a \mid a \ , \text{ porque } a = a \cdot 1$$

2.ª *Antisimétrica:* dos números naturales asociados por la relación de divisibilidad son necesariamente iguales.

$$(\forall a) \ (\forall b) \ (a \mid b \text{ y } b \mid a) \Rightarrow a = b$$

En efecto, de

$$b = a \cdot q \quad ; \quad a = b \cdot q'$$

se deduce

$$b\,a = a\,b\,q\,q'$$

o sea

$$1 = q\,q' \quad ; \quad q = q' = 1$$

Por tanto, $a = b$.

3.ª *Transitiva:* todo divisor de un número, lo es de los múltiplos de éste.

$$(\forall a) \ (\forall b) \ (\forall c) \ (a \mid b \text{ y } b \mid c) \Rightarrow a \mid c$$

En efecto, de

$$b = a\,q \quad ; \quad c = b\,q'$$

se deduce, sustituyendo el valor de b en la segunda igualdad

$$c = a\,q\,q' \Leftrightarrow a \mid c$$

Por tanto, la relación "a divide a b" es una *relación de orden* pero de *orden parcial,* ya que hay elementos que no son compara

bles, como 3 y 7: ni 3 divide a 7, ni 7 divide a 3. Esta relación ordena los números en forma de malla o red, por ejemplo:

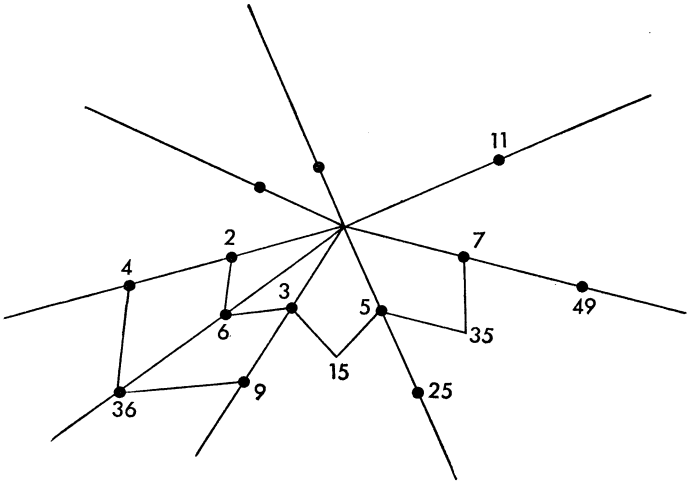


FIGURA 17

68. Propiedades de los divisores.

1.ª *Todo número que divide a otros varios, divide a su suma.*

$$(m \mid a,\ m \mid b \text{ y } m \mid c) \Rightarrow m \mid a + b + c$$

En efecto, de

$$a = m \cdot n \quad ; \quad b = m \cdot p \quad ; \quad c = m \cdot q$$

se deduce

$$a + b + c = m\,(n + p + q) \Leftrightarrow m \mid a + b + c$$

2.ª *Todo número que divide a otros dos, divide a su diferencia.*

$$(m \mid a \text{ y } m \mid b) \Rightarrow m \mid a - b \quad ; \quad a > b$$

3.ª *Todo número que divide a otro, divide a los múltiplos de éste.*

$$m \mid a \Rightarrow m \mid a\,n$$

En efecto

$$a \cdot n = a + a + a + \overset{(n}{\ldots\ldots} + a$$

y como m divide a cada uno de los sumandos, tiene que dividir a la suma.

69. Máximo común divisor de dos números.

Al conjunto de los divisores de un número a se designa por $D(a)$. Dicho conjunto admite siempre los elementos 1 y a, ya que

$$a = a \cdot 1 \quad ; \quad D(a) = \{1, \ldots, a\}$$

Estos son los dos *divisores triviales* de a.

Además, dicho conjunto es *finito*, pues un divisor de a es inferior o igual a a:

$$m \mid a \Rightarrow m \leqslant a$$

Si $D(a)$ no tiene más elementos que 1 y a, se dice que a es *primo*. Si $D(a)$ tiene otros elementos, además de 1 y a, se dice que a es *compuesto*.

Sean ahora dos números a y b: los divisores comunes a ambos forman un conjunto, que designamos por $D(a, b)$, y que es la intersección de los conjuntos $D(a)$ y $D(b)$

$$D(a, b) = D(a) \cap D(b)$$

Dicho conjunto no es vacío, ya que por lo menos el número 1 pertenece a él. Si $D(a, b) = \{1\}$, los dos números a y b se llaman *primos entre sí*. El conjunto $D(a, b)$, subconjunto finito de N y ordenado por la relación $\leqslant$, tendrá en todo caso un elemento máximo d: es el *máximo común divisor*. Se escribe

$$a \wedge b = d$$

A dos números naturales a y b se hace corresponder el máximo común divisor d. Se define así una *ley de composición interna* en N, que tiene las propiedades siguientes:

1.ª *Idempotente:*

$$a \wedge a = a$$

2.ª *Conmutativa:*

$$a \wedge b = b \wedge a$$

3.ª *Asociativa:*

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

ya que en resumen lo que se hace de las dos formas es tomar los divisores comunes a los tres números.

Sean

$$a = 24, \quad b = 36, \quad c = 45$$

Se tiene

$$a \wedge b = 12 \quad ; \quad (a \wedge b) \wedge c = 12 \wedge 45 = 3$$
$$b \wedge c = 9 \quad ; \quad a \wedge (b \wedge c) = 24 \wedge 9 = 3$$

70. Mínimo común múltiplo de dos números.

Dado un número a, el conjunto $M(a)$ de todos los múltiplos de a es infinito.

$$M(a) = \{a, 2a, 3a, \ldots\}$$

Dados dos números a y b, el conjunto de los múltiplos comunes $M(a, b)$ será

$$M(a, b) = M(a) \cap M(b)$$

Este conjunto $M(a, b)$ no es vacío, puesto que por lo menos contiene el elemento $a \cdot b$. Siendo un subconjunto de N y ordenado por la relación $\leqslant$, tendrá un elemento mínimo m, el *mínimo común múltiplo* de a y b. Se escribe

$$a \vee b = m$$

A dos números naturales a y b se hace corresponder su mínimo común múltiplo m. Se tiene así definida una *ley de composición interna* en N con las siguientes propiedades:

1.ª *Idempotente:*

$$a \vee a = a$$

2.ª *Conmutativa:*

$$a \vee b = b \vee a$$

3.ª *Asociativa:*

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$$

Por ejemplo, si $a = 24$, $b = 36$, $c = 45$, es

$$a \vee b = 72 \quad ; \quad (a \vee b) \vee c = 72 \vee 45 = 360$$
$$b \vee c = 180 \quad ; \quad a \vee (b \vee c) = 24 \vee 180 = 360$$

71. Propiedades comunes a las operaciones $\wedge$ y $\vee$.

Para las demostraciones basta acudir al conocido método de descomposición en factores primos.

4.ª *Ley de absorción:*

$$(a \wedge b) \vee a = a \quad ; \quad (a \vee b) \wedge a = a$$

Esta ley permite simplificar.

5.ª *Ley distributiva:*

a) *de* $\vee$ *respecto a* $\wedge$

$$(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$$

b) *de* $\wedge$ *respecto a* $\vee$

$$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

Existe una analogía completa entre las dos operaciones: ambas tienen *igual fuerza*. Por tanto, el conjunto N, ordenado por la relación de divisibilidad, forma un *retículo* (núm. 14).

72. Determinación del máximo común divisor de dos números por el algoritmo de Euclides.

Suponemos conocido el método de determinación del máximo común divisor por descomposición en factores primos. Dicho método resulta cómodo cuando los factores primos son pequeños, 2, 3, 5, 7... Pero en los demás casos la descomposición en factores primos resulta muy laboriosa. Un método seguro y breve es el del *algoritmo de Euclides*, o de *las divisiones sucesivas*. Se denomina *algoritmo* todo método sistemático de cálculo. Se basa en los siguientes *teoremas preliminares:*

I. *Si dos números son divisibles el uno por el otro, el menor es su m. c. d.*

Sean los números 13 y 39, tales que 13 divide a 39; decimos que 13 es el m. c. d. de los dos números.

En efecto, 13 es, por hipótesis, un divisor común de los dos números; y es el mayor, porque ningún otro superior a 13 divide a éste.

II. *Todo número que divide al dividendo y divisor de una división, divide también al resto.*

Tenemos, siendo D, d, q, r, el dividendo, divisor, cociente y resto, respectivamente:

$$D = dq + r, \qquad \text{de donde:} \qquad r = D - dq$$

Todo divisor de d, lo es de dq, y siéndolo de D y dq, lo es de r, que es la diferencia (núm. 68).

Recíprocamente, *todo divisor de* d *y* r, *lo es de* D.

En efecto, por ser divisor de dq y de r, lo será de D, que es su suma.

Por consiguiente, los divisores de D y d son los mismos que los de d y r. Luego:

$$D \wedge d = d \wedge r$$

y se puede enunciar:

III. *Si dos números no son divisibles uno por otro, su m. c. d. es el mismo que el del menor de ellos y del resto de la división de ambos.*

73. Algoritmo de Euclides.

De los teoremas I, II y III se deduce un procedimiento para determinar el m. c. d. de dos números, a y b, siendo $a > b$.

Se divide a por b. Si el resto, r_1, de esta división es nulo, el m. c. d. buscado es b. En caso contrario, se divide b por el resto r_1 de la primera división; si el resto r_2 de esta división no es nulo, se divide el resto r_1 por r_2, y así sucesivamente.

En virtud del teorema III, se puede escribir:

$$a \wedge b = b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2 = \ldots$$

El m. c. d. de a y b es, pues, el mismo que el de dos restos consecutivos cualesquiera.

Pero como el resto de una división es inferior al divisor, los términos de la sucesión:

$$b,\ r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots$$

van, pues, decreciendo, y después de un cierto número de divisiones se llegará a una última división, la de r_{n-1} por r_n, por ejemplo, cuyo resto es nulo.

El último divisor r_n es el m. c. d. de los dos restos consecutivos r_{n-1} y r_n; y según lo que precede, es también el m. c. d. de a y b.

Se puede, pues, enunciar la regla siguiente:

REGLA.—*Para hallar el m. c. d. de dos números, se divide el mayor por el menor. Si el resto es nulo, el menor es el m. c. d.*

Si el resto no es nulo, se divide el menor por este resto; luego el primer resto por el segundo, y así sucesivamente hasta que la división sea exacta.

El ÚLTIMO DIVISOR EMPLEADO *es el m. c. d.*

Los cálculos se disponen como en el ejemplo siguiente:

EJEMPLO.—*Hallar el m. c. d. de los números 728 y 304.*

	2	2	1	1	7	Cocientes
728	304	120	64	56	8	Divisores
120	64	56	8	0		Restos

El m. c. d. de 728 y 304 es **8**.

Del método seguido se deduce también: *Los divisores comunes a* a *y* b *son todos los divisores de su m. c. d., y sólo éstos.*

74. Problemas resueltos por la aplicación del m. c. d.

EJEMPLO 1.—*¿Cuál es el mayor número que al emplearse como divisor de 68130 y 107275 origina los restos 27 y 49, respectivamente?*

Solución: Ya que al dividir 68130 resulta un resto de 27, el "mayor número" pedido debe dividir exactamente a 68130 — 27, o sea a 68103. Análogamente, debe dividir exactamente a 107275 — 49, o sea a 107226.

El problema queda ahora reducido a hallar el m. c. d. de 68103 y 107226, que es **1449**, y éste es el número pedido.

EJEMPLO 2.—*Hallar el mayor número que divide a 247, 367 y 427, dejando en todos los casos 7 de resto.*

Solución: El mayor número pedido tiene que dividir exactamente a 247 — — 7 = 240, a 367 — 7 = 360 y a 421 — 7 = 420. Luego será el m. c. d. de estos tres números.

$$\text{m. c. d. } (240, 360, 420) = \mathbf{60}$$

EJEMPLO 3.—*En el contorno de un campo trapezoidal de lados 72, 96, 120 y 132 metros, respectivamente, se han plantado árboles igualmente espaciados. Calcular el número de árboles plantados, sabiendo que hay uno en cada vértice y que la distancia entre dos consecutivos es la máxima posible.*

Solución: La distancia entre dos árboles será:

$$\text{m. c. d. } (72, 96, 120, 132) = 12 \text{ m.},$$

y el número de árboles: $\dfrac{72 + 96 + 120 + 132}{12} = \mathbf{35 \text{ árboles.}}$

75. Propiedades del máximo común divisor de dos números.

1.ª *Si dos números* a *y* b *se multiplican (o dividen) por un mismo número* h, *el m. c. d. de ambos queda multiplicado (o dividido) por dicho número.*

En efecto, si aplicamos el algoritmo de Euclides a los números *ah* y *bh*, se obtendrán como restos sucesivos, en virtud de las propiedades de la división,

$$r_1h,\ r_2h,\ \ldots,\ r_nh,\ o$$

Luego

$$ah \wedge bh = r_nh = d \cdot h$$

Análoga demostración para la división.

2.ª *Los cocientes de dividir dos números por su m. c. d. son primos entre sí.* Pues el m. c. d. de estos cocientes es $d/d = 1$, según la propiedad anterior:

$$\frac{a}{d} \wedge \frac{b}{d} = \frac{d}{d} = 1 \quad ; \quad a' \wedge b' = 1$$

3.ª *Si un número* h *divide a un producto de dos factores,* a · b, *y es primo con uno de ellos* a, *divide al otro factor* b. (Teorema de Euclides.)

En efecto, por hipótesis, es $a \wedge h = 1$. Luego $ab \wedge hb = b$. El número h es un divisor de $a \cdot b$ y de $h \cdot b$, luego también de su m. c. d. (núm. 73).

76. Determinación del mínimo común múltiplo de dos números.

Llamemos a' y b' los cocientes de dividir a y b por su m.c.d. d. Será

$$a = d \cdot a' \quad ; \quad b = d \cdot b' \qquad [1]$$

Cualquier múltiplo de a será de la forma $N = da'h$; si este número es además múltiplo de b, será $da'h = b \cdot j = db'j$. Luego $a'h = b'j$. El número b' es, por tanto, un divisor de $a'h$, y como es primo con a', será divisor de h, según el teorema de Euclides. O sea. $h = b'k$, y en consecuencia

$$N = da'b'k \qquad [2]$$

Recíprocamente, cualquier número de la forma [2] es múltiplo de a y de b, en virtud de las igualdades [1]. Luego la relación [2] repre-

senta todos los múltiplos comunes de a y b. El menor de ellos, o *mínimo común múltiplo*, que denominaremos m, se obtendrá haciendo en ella $k = 1$. Es decir

$$m = d \cdot a' \cdot b' = ab' = a'b \qquad [3]$$

Si multiplicamos los dos miembros de [3] por D, resulta

$$m \cdot d = da' \cdot db' = a \cdot b \qquad [4]$$

El producto del mínimo común múltiplo de dos números por su máximo común divisor es igual al producto de los dos números.

Por tanto, *para hallar el mínimo común múltiplo de dos números se divide el producto de los mismos por su m. c. d.*

EJEMPLO.—*Hallar el mínimo común múltiplo de 144 y 40.*

Solución: Se representa abreviadamente por m. c. m. (144, 40). Por el algoritmo de Euclides hallamos que m. c. d. (144, 40) = 8.

Luego

$$\text{m. c. m. } (144, 40) = \frac{144 \cdot 40}{8} = \mathbf{720}$$

De la igualdad [2] se deduce también que: *Todos los múltiplos comunes a dos números son los múltiplos de su m. c. m.*

77. Máximo común divisor de varios números.

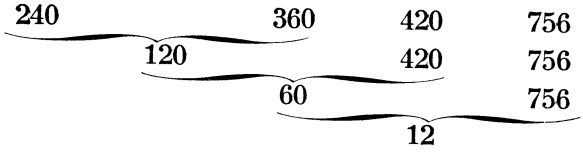
Sean varios números $a, b, c, \ldots, h$, y sea d el m.c.d. de a y b. Todo divisor común de $a, b, c, \ldots, h$, lo es también de $d, c, \ldots, h$, y recíprocamente todo divisor de d, lo es de sus múltiplos a y b. Luego resulta que:

Los divisores comunes a los números a, b, c, ..., h, *son los divisores comunes a los números* d, c, ..., h, *siendo* d *el m.c.d. de* a *y* b. Por tanto, para hallar el m. c. d. de varios números se comienza hallando el de los dos primeros. Aplicando de nuevo la propiedad, se sustituyen d y c por su m.c.d., y así sucesivamente se van obteniendo grupos de números con los mismos divisores comunes que el grupo dado, pero cada vez con menos números. Por fin, dicho grupo se reduce a un solo par de números, y sea d' su m.c.d. Resulta que los divisores comunes a $a, b, c, \ldots, h$, son los de d', y éste es el mayor de todos.

Para hallar el m. c. d. de varios números se halla primero el de dos cualesquiera; luego el del resultado obtenido y otro de los números dados, y así sucesivamente hasta haber empleado todos los números. El m. c. d. del último par es el m. c. d. pedido.

Como el m. c. d. no puede ser mayor que el menor de los números dados, es ventajoso empezar las operaciones con los números menores.

El cuadro adjunto nos indica que el m. c. d. de los números 240, 360, 420 y 756 es 12.



78. Mínimo común múltiplo de varios números.

Dados los números $a, b, c, \ldots, h$, llamemos m al m. c. m. de a y b. Todo múltiplo de a y b es múltiplo de m. Luego los múltiplos comunes a $a, b, c, \ldots, h$, lo son también de $m, c, \ldots, h$. Y recíprocamente, todo múltiplo de m lo es de sus divisores a y b. O sea: *Los múltiplos comunes a los números* a, b, c, ..., h, *son los múltiplos comunes a los números* m, c, ..., h, *siendo* $m = m.\ c.\ m.$ (a, b). Aplicando sucesivamente esta propiedad, llegamos a una pareja de números, cuyo m.c.m. sea m'. Los múltiplos comunes a $a, b, c, \ldots, h$, son, pues, los múltiplos de m', y éste es el menor de todos. Tenemos así un método para hallar el m. c. m. de varios números.

EJEMPLO.—*Hallar el m. c. m. de 144, 40 y 36.*

Solución: Hemos hallado antes m. c. m. (144, 40) = 720.
Luego m. c. m. (144, 40, 36) = m. c. m. (720, 36) = **720.**
Del razonamiento anterior se deduce también que: *Los múltiplos comunes de varios números son los múltiplos de su m. c. m.*

79. La divisibilidad en el anillo Z de los números enteros.

La relación

$$a \mid b \Leftrightarrow b = a \cdot q$$

extendida al anillo Z de los números enteros, no es ya una relación de orden, ya que *no es antisimétrica,* pues

$$(\forall\ a)\ (\forall\ b)\ (a \mid b \text{ y } b \mid a) \Rightarrow a = \pm b$$

En efecto, de

$$b = a \cdot q \quad ; \quad a = bq'$$

se deduce

$$ba = abqq' \quad ; \quad 1 = qq'$$
$$q = q' = \pm 1$$

Por tanto $a = \pm b$. Es decir, dos elementos que se dividen mutuamente no son necesariamente iguales, por ejemplo, 5 y -5.

Se tiene también ahora

$$\forall\ x,\ 0 = x \cdot 0 \Rightarrow x \mid 0$$
$$\forall\ x,\ 0 = 0 \cdot x \Rightarrow 0 \mid 0$$

Cualquier número entero es divisor de cero. El cero es divisor de cero, pero no lo es de ningún otro entero.

Considerando asociados cada dos elementos que se dividen mutuamente, tendremos una clasificación de Z en clases de equivalencia: $\{0\}$, $\{1, -1\}$, $\{2, -2\}$ ..., y sobre el conjunto de estas clases la relación $a \mid b$ es *antisimétrica*, y, por tanto, determina en él un orden parcial. Basta considerar como elementos canónicos de cada clase los números positivos. El cero aparece como múltiplo de cualquier número entero y como divisor solamente de sí mismo.

80. Problemas de aplicación.

EJEMPLO 1.—*Hallar dos números sabiendo que su suma es 240 y su m. c. m. 1768.*

Solución: En virtud de las fórmulas [1] y [3], se tiene:

$$\left.\begin{aligned} a + b = (a' + b')\, d &= 240 \\ m = a'b'd &= 1768 \end{aligned}\right\} \qquad [5]$$

Dividiendo las ecuaciones [5] y simplificando

$$\frac{a' + b'}{a'b'} = \frac{240}{1768} = \frac{30}{221}$$

Ya que a' y b' son primos entre sí, también lo son $a' + b'$ y $a'b'$. Luego las fracciones anteriores son irreducibles, y siendo iguales, han de tener necesariamente sus numeradores iguales entre sí, y lo mismo sus denominadores. O sea:

$$a' + b' = 30; \qquad a'b' = 221$$

de donde $a' = 17$; $b' = 13$.

De la primera de las ecuaciones [5], deducimos:

$$30d = 240 \quad ; \quad d = \frac{240}{30} = 8$$

Luego

$$a = a' \cdot d = 17 \cdot 8 = \mathbf{136}$$
$$b = b' \cdot d = 13 \cdot 8 = \mathbf{104}$$

EJEMPLO 2.—*Hallar dos números, conociendo la suma de sus cuadrados, 10530, y su m. c. m., 297.*

Solución: Como en el problema anterior, será:

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (a'^2 + b'^2)\, d^2 = 10530 \\ m^2 &= (a'b'd)^2 = a'^2b'^2d^2 = 297^2 \end{aligned}\right\} \qquad [6]$$

Por tanto

$$\frac{(a'^2 + b'^2)\, d^2}{a'^2b'^2d^2} = \frac{10530}{297^2}$$

Haciendo irreducibles las dos fracciones

$$\frac{a'^2 + b'^2}{a'^2b'^2} = \frac{130}{1089}$$

Luego

$$a'^2 + b'^2 = 130$$
$$a'^2 \cdot b^{2\prime} = 1089$$

De donde

$$a'^2 = 121; \qquad a' = 11$$
$$b'^2 = 9; \qquad b' = 3$$

De la segunda de las ecuaciones [6] sale

$$a'b'd = 297 \quad ; \quad 11 \cdot 3 \cdot d = 297$$

$$d = \frac{297}{43} = 9$$

Por consiguiente

$$a = 11 \cdot 9 = \mathbf{99}$$
$$b = 3 \cdot 9 = \mathbf{27}$$

EJEMPLO 3.—*Hallar el divisor y el cociente de una división, sabiendo que el dividendo es 7939368, y que los sucesivos restos encontrados al efectuar la división son 262, 64, 646 y 497.*

Solución: El divisor de la división ha de ser un divisor común de las diferencias

7939	2623	646	6468
— 262	— 64	— 646	— 497
7677	2559	000	5971

excepto de la diferencia nula (la tercera) que indica que la cifra correspondiente del cociente es nula. Luego será el

$$\text{m. c. d. } (7677,\ 2559,\ 5971) = 853$$

o uno de sus divisores. Se comprueba que

dívisor = 853; **cociente = 9307**

EJERCICIOS

1. Hallar por el método de las divisiones sucesivas el m. c. d. de los números siguientes:

   a) 384 y 1024; *b)* 1379 y 2401; *c)* 10166 y 46189

2. Tenemos dos cuerdas, una de 12 m. y la otra de 8 m. de larga. ¿Cómo las dividiremos de modo que los trozos de una sean de igual longitud que los de la otra y lo más largos que sea posible?
3. Una maestra divide sus escolares, que son 221 niños y 143 niñas, en el menor número posible de secciones iguales, de modo que cada sección de niños tenga el mismo número que cada sección de niñas. Hallar el número de secciones.
4. Un tendero desea poner en cajas 12028 manzanas y 12772 naranjas de modo que cada caja contenga el mismo número de manzanas o de naranjas y, además, el mayor número posible de éstas. Hallar el número de cajas de manzanas y naranjas.
5. Dos cuerpos de ejército contienen 12028 hombres y 12772 hombres, respectivamente. ¿Cuál es el mayor número en cada regimiento, si cada cuerpo ha de ser dividido en regimientos de igual magnitud?
6. Si en una factoría el importe de los salarios es de 13202 pesetas, y en otra de 146083 pesetas, y cada hombre recibe el mismo salario, ¿cuántos hombres hay en cada factoría, si el salario es el mayor posible?
7. Un número de barriles de igual cabida, y cada uno conteniendo un número exacto de cántaras, contienen 323 cántaras de vino. Otros barriles de la misma cabida contienen 255 cántaras. Hallar el número total de barriles.
8. Hallar el mayor número que divide a 4352 y 9039, dejando en ambos casos 9 de resto.
9. ¿Cuál es el mayor número tal que si 13850 y 17030 se dividen por él, el resto en cada caso es 17?
10. ¿Cuál es el mayor número que divide a 2000 y 2708 y da restos 11 y 17, respectivamente.

11. Hallar por el método de las divisiones sucesivas el m. c. d. de los números siguientes:

a) 126, 396, 1080; *b)* 440, 1800, 2800; *c)* 183, 793, 976

12. Tres personas tienen, respectivamente, 275 pesetas, 150 pesetas y 225 pesetas, que desean emplear completamente en comprar pollos del mayor precio por cabeza. ¿Cuál es éste?

13. Un agricultor desea poner 39 fanegas de trigo, 403 fanegas de cebada y 182 fanegas de avena en recipientes iguales, que queden completamente llenos, y sean lo mayor posible. ¿Cuántas fanegas caben en cada recipiente?

14. Un hombre tiene un campo triangular, cuyos lados miden 96 m., 84 m. y 104 metros, respectivamente. Desea cercar este campo con cañizos de la mayor longitud posible, pero todos iguales. ¿Cuál es la longitud de cada cañizo?

15. Se han plantado árboles igualmente espaciados en el contorno de un campo triangular cuyos lados miden 144 m., 180 m. y 240 m. Sabiendo que hay un árbol en cada vértice y que la distancia entre dos árboles consecutivos está comprendida entre 4 m. y 10 m., calcular el número de árboles plantados.

16. En una bodega hay tres toneles de vino, cuyas capacidades son 250, 306 y 504 litros, respectivamente. Su contenido se quiere envasar exactamente en cierto número de garrafas iguales. Obtener razonadamente las capacidades máximas de estas garrafas para que en ellas se pueda envasar el vino contenido en cada uno de los toneles, y cuántas garrafas se precisan.

17. Determinar el año del presente siglo tal que, dividido en grupos de dos cifras, ambos grupos tengan de m. c. m. 1102, y el resto obtenido al dividir uno por otro, sea 1.

18. Calcular la arista del menor cubo en el que se pueden acoplar, sin dejar espacios, un número entero de ortoedros iguales, cuyas dimensiones, expresadas en centímetros, son $C_{4,2}$, P_4 y el módulo del complejo 8-6i. ¿Cuántos ortoedros pueden acoplarse? ¿Cuál es el volumen de uno de ellos? ¿Cuál es del cubo?

19. Hallar el divisor y el cociente de una división, sabiendo que el dividendo es 258728 y que los restos sucesivos al efectuarla son 379, 480 y 392.

20. Hallar dos números sabiendo que su m. c. m. es 864 y la suma de sus cuadrados es 55872.

21. Hallar la menor fracción decimal exacta tal que dividida por cada una de las fracciones ordinarias

$$\frac{56272}{263775}; \quad \frac{9764}{36615}$$

da cocientes exactos.

22. El m. c. m. de los términos de una fracción es 340. Determinar esta fracción, sabiendo que no altera su valor si se suma 20 al numerador y 25 al denominador.

23. Dos números son divisibles por 15, y los cocientes respectivos son 126 y 702. Hallar el m. c. d. y el m. c. m. de dichos números sin calcular los valores de éstos.

24. Hallar dos números cuyo m. c. m. es 48484 y cuyo m. c. d. es 124.

25. Hallar dos números conociendo su producto, 538265, y su m. c. m., 5915.

26. Determinar dos números sabiendo que su diferencia es 240 y su m. c. m. 1260.

27. Siendo 11 el m. c. d. de dos números, y 3, 1, 1 los cocientes en orden inverso de las divisiones hechas para obtenerlo, por el algoritmo de Euclides, hallar dichos números.

28. Hallar dos números tales que su suma es 371, y el cociente de su m. c. m. por su m. c. d. es 430.

6

AVERIGUACION DE NUMEROS PRIMOS

81. Definiciones.

Número primo ABSOLUTO (o sencillamente PRIMO) *es aquel que sólo es divisible por sí mismo y por la unidad.*

EJEMPLOS: 2, 5, 7, 13, 19 son números primos.

Número COMPUESTO *es aquel que no es primo,* es decir, que *además de sí mismo y la unidad tiene otros divisores.*

EJEMPLOS: 4, 6, 9, 10, 15 son números compuestos.

NOTA.—En lo que sigue prescindiremos del 1 como número primo, con el fin de abreviar los enunciados.

82. Propiedad de los números compuestos.

El menor divisor de un número compuesto es primo, y su cuadrado es inferior o igual a este número.

Sea el número compuesto N, cuyo menor divisor es a.

I. *El número* a *es primo.* En efecto, si a no fuera primo, admitiría un divisor d menor que a. Este divisor d dividiría a N, que es múltiplo de a. Luego a no sería el menor divisor de N, lo que va contra la hipótesis. Por tanto, a es primo.

II. *El cuadrado de* a *es inferior o igual a* N. En efecto, el cociente c de la división de N por a es también un divisor de N. Es, pues, superior o igual a a, que es el menor divisor de N. Es decir,

$$a \leqslant c$$

Multiplicando los dos miembros de esta relación por a, resulta:

$$a^2 \leqslant c \cdot a \qquad \text{ó} \qquad a^2 \leqslant N$$

83. La serie de los números primos es ilimitada.

Sea n un número primo cualquiera; hay que demostrar que existe un número primo mayor que n.

En efecto, formemos el producto de todos los números primos hasta n y añadamos 1 a este producto. Tendremos el número:

$$S = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times \ldots \times n + 1$$

Si S es primo, el teorema está demostrado, ya que S es superior a n.

Si S no es primo, admite un divisor primo d. Pero S no es divisible por ninguno de los factores del producto:

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \ldots n$$

porque si consideramos el factor 7, por ejemplo, la igualdad

$$S = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \ldots) \times 7 + 1$$

nos dice que el resto de la división de S por el factor 7 es 1. Luego el número primo d es superior a n.

84. Formación de una tabla de números primos.

Propongámonos formar la tabla de números primos inferiores a 100.

Para ello, en la serie de los 100 primeros números se tachan los números pares distintos del 2, que es primo. El primer número no tachado es 3, que es primo. Tachemos los múltiplos de 3 que no lo han sido aún, o sea a partir de 9 de tres en tres lugares. Luego los múltiplos de 5 que no lo han sido aún, o sea a partir de 25 de cinco en cinco lugares. Y, por fin, los múltiplos de 7 a partir de 49:

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50
51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70
71	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**	80
81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90
91	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100

Para comprender este procedimiento deben tenerse presentes tres observaciones. Supongamos que sea p el último número primo cuyos

múltiplos acaban de ser tachados, y que sea q el primer número no tachado que sigue a p.

1.ª El primer número no tachado q es primo. En efecto, si q fuera compuesto, su menor divisor sería uno de los números primos inferiores a q (núm. 82). Pero los múltiplos de estos números primos han sido tachados. Luego q sería uno de los números tachados, lo que es contrario a la hipótesis.

2.ª El primer múltiplo de q no tachado es q^2. En efecto, cada uno de los números 2, 3, 4, ..., $q - 1$, siendo divisibles por uno a lo menos de los números primos inferiores a q, sucederá lo mismo con los números $2q$, $3q$, ... $(q - 1)\ q$. Luego estos múltiplos de q han sido tachados.

3.ª La tabla está, pues, terminada cuando el primer número no tachado tiene un cuadrado superior a 100. Como sucede con el 11 en nuestro caso, cuyo cuadrado es 121.

85. Cómo se sabe si un número N es primo.

Sabemos (núm. 82) que si N es un número compuesto, admite un divisor primo cuyo cuadrado es inferior o igual a N. De ahí se deducen los dos puntos siguientes:

1.º *Para reconocer si* N *es primo o compuesto, basta ensayar los divisores primos 2, 3, 5, ..., con exclusión de los divisores compuestos.*

2.º *Se puede concluir que* N *es primo cuando, sin haber obtenido división exacta, se llega a un divisor primo cuyo cuadrado es superior a* N.

Así, para reconocer si 107 es primo, basta ensayar los divisores 2, 3, 5 y 7, ya que $11^2 > 107$. Como cada una de estas divisiones no da un cociente exacto, se puede concluir que 107 es primo.

NOTA.—En la práctica terminan los ensayos cuando, sin haber obtenido división exacta, se llega a una división cuyo cociente es inferior al divisor.

86. Todo número compuesto se puede descomponer en un producto de factores primos.

Sea el número compuesto N; tendrá un divisor primo a distinto de la unidad (núm. 82). Poniendo $N : a = N'$, resulta:

$$N = aN' \qquad [1]$$

Si N' es primo, el teorema está demostrado, pues N consta de los dos factores primos a y N'. Si es compuesto, tendrá un divisor primo b, y podremos escribir $N' = bN''$. Sustituyendo este valor en la igualdad [1] se tiene:

$$N = abN'' \qquad [2]$$

Continuando el razonamiento, como los cocientes sucesivos van decreciendo, se llegará necesariamente a un cociente primo, y quedará descompuesto el número N en un producto de factores todos primos.

Vamos a demostrar que *la descomposición de un número en factores primos es única* (teorema fundamental de la Aritmética).

Procedamos por reducción al absurdo, suponiendo que un número entero a admite dos descomposiciones distintas en factores primos

$$m = p_1 p_2 p_3 \ldots p_r = p'_1 \cdot p'_2 \cdot p'_3 \ldots p'_s$$

Ya que p_1 divide al primer miembro, dividirá al segundo miembro, y, por tanto, según el teorema de Euclides (núm. 75), debe dividir a uno de los factores p'_i. Pero p'_i es primo, luego debe ser $p_1 = p'_i$. Suprimiento este factor común en los dos miembros, resultará que p_2 debe dividir a uno de los p'_j restantes, luego debe ser igual a él. Suprimiendo p_2 y p'_j, procederíamos análogamente con p_3 y p'_k, etc. Así se van suprimiendo todas las p y todas las p', que aparecen en parejas de números iguales, lo que demuestra que, salvo a lo más el orden de los factores, las dos descomposiciones son idénticas.

87. Condición de divisibilidad.

La condición necesaria y suficiente para que un número sea divisible por otro es que el primero contenga todos los factores primos del segundo, con exponentes iguales o mayores.

I. *Condición necesaria:* Sea N un número divisible por d; decimos que N contiene todos los factores primos de d con exponentes iguales o mayores.

En efecto, siendo N divisible por d, la división de N por d da un cociente exacto k, y puede escribirse:

$$N = dk$$

N contiene, pues, todos los factores primos de d, y además los de k.

II. *Condición suficiente:* Si un número contiene todos los factores primos de otro, con exponentes iguales o mayores, es divisible por este otro.

En efecto, si se tiene, por ejemplo:

$$N = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \qquad \text{y} \qquad d = 2^2 \cdot 3^3$$

se puede transformar N en un producto de dos factores:

$$N = (2^2 \cdot 3^3) \times (2 \cdot 3 \cdot 5)$$

tales que el primero sólo contenga los factores primos de d, afectados con los exponentes que tienen en d, y el segundo los factores restantes. De aquí resulta que N es múltiplo de d, o lo que es lo mismo, que N es divisible por d.

88. Hallar todos los divisores de un número.

Sea 540 el número dado. Descompongámosle en factores primos:

$$540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$$

En líneas horizontales, escribamos a continuación de la unidad las diversas potencias de los factores primos de 540:

$$A \begin{cases} 1,\ 2,\ 2^2 \\ 1,\ 3,\ 3^2,\ 3^3 \\ 1,\ 5 \end{cases}$$

Multipliquemos todos los números de la primera fila por cada uno de los números de la segunda; así obtendremos el cuadro B:

$$B \begin{cases} 1,\ 2,\ 2^2 \\ 3,\ 2 \cdot 3,\ 2^2 \cdot 3 \\ 3^2,\ 2 \cdot 3^2,\ 2^2 \cdot 3^2 \\ 3^3,\ 2 \cdot 3^3,\ 2^2 \cdot 3^3 \end{cases}$$

Multipliquemos luego todos los productos del cuadro B por los números de la tercera fila:

$$C \begin{cases} 1,\ 2,\ 2^2 \\ 3,\ 2 \cdot 3,\ 2^2 \cdot 3 \\ 3^2,\ 2 \cdot 3^2,\ 2^2 \cdot 3^2 \\ 3^3,\ 2 \cdot 3^3,\ 2^2 \cdot 3^3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 5,\ 2 \cdot 5,\ 2^2 \cdot 5 \\ 3 \cdot 5,\ 2 \cdot 3 \cdot 5,\ 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 3^2 \cdot 5,\ 2 \cdot 3^2 \cdot 5,\ 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ 3^3 \cdot 5,\ 2 \cdot 3^3 \cdot 5,\ 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \end{array}$$

Los números del cuadro C son todos los divisores pedidos.
Observa que dichos divisores son los términos del producto

$$(1 + 2 + 2^2)\ (1 + 3 + 3^2 + 3^3)\ (1 + 5)$$

En general, *todos los divisores del número* $N = a^\alpha\ b^\beta\ c^\gamma\ \ldots\ h^\lambda$ *son los términos del producto*

$$(1 + a + a^2 + \ldots + a^\alpha)\ (1 + b + b^2 + \ldots + b^\beta)\ \ldots$$
$$\ldots\ (1 + h + h^2 + \ldots + h^\lambda) \qquad [3]$$

En efecto, todo término de este producto es de la forma

$$a^m b^n c^p \ldots h^s \qquad [4]$$

siendo $m \leqslant \alpha$, $n \leqslant \beta$, $p \leqslant \gamma$, ..., $s \leqslant \lambda$, y pudiendo ser todos nulos. Luego es un divisor del número N.

Recíprocamente, todo divisor de N es de la forma [4], con las condiciones enunciadas. Luego es un término del producto [3].

De aquí se deduce que:

El número de divisores del número $N = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots h^{\lambda}$ es igual a

$$N' = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \ldots (\lambda + 1) \qquad [5]$$

La *suma de todos los divisores* del número N es

$$S = (1 + a + a^2 + \ldots + a^{\alpha})(1 + b + \ldots + b^{\beta}) \ldots$$
$$\ldots (1 + h + h^2 + \ldots + h^{\lambda}) =$$

$$= \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \cdot \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{h^{\lambda+1} - 1}{h - 1} \qquad [6]$$

ya que cada paréntesis es una progresión geométrica.

89. Cálculo del m. c. d. por el método de los factores primos.

El m. c. d. de varios números descompuestos en sus factores primos es el producto de los factores primos comunes, afectados de los menores exponentes.

Sean los números:

$$96 = 2^5 \cdot 3; \quad 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5; \quad 4680 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13$$

Decimos que:

$$\text{m. c. d. } (96, 360, 4680) = 2^3 \cdot 3 = 8 \cdot 3 = \mathbf{24}$$

En efecto, $2^3 \cdot 3$ cumple con la condición necesaria y suficiente para ser divisor de los tres números dados.

Además, es el mayor divisor común posible, porque si aumentáramos algunos de los exponentes o tomáramos algún factor no común, el número resultante ya no cumpliría dicha condición necesaria y suficiente.

90. Modo de hallar el m. c. m. por el método de factores primos.

El m. c. m. de varios números descompuestos en factores primos es el producto de todos los factores primos, eligiendo sólo de cada uno el de mayor exponente.

Sean los números:

$$96 = 2^5 \cdot 3; \quad 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5; \quad 4680 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13$$

Decimos que:

$$\text{m. c. m. } (96, 360, 4680) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13 = 18720$$

En efecto, $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13$ cumple con la condición necesaria y suficiente para ser múltiplo de los tres números dados.

Además, es el menor múltiplo común posible, porque si disminuyéramos algún exponente, o dejáramos algún factor, el número resultante ya no cumpliría dicha condición necesaria y suficiente.

91. Problemas de aplicación.

EJEMPLO 1.—*Hallar un número entero N, compuesto de los factores primos 2, 5 y 7, sabiendo que 5N tiene ocho divisores más que N, 7N tiene doce divisores más que N, y 8N tiene dieciocho divisores más que N.*

Solución: Tendremos que

$$N = 2^{\alpha}\ 5^{\beta}\ 7^{\gamma} \quad ; \quad 5N = 2^{\alpha}\ 5^{\beta+1}\ 7^{\gamma}$$

$$7N = 2^{\alpha}\ 5^{\beta}\ 7^{\gamma+1} \quad ; \quad 8N = 2^{\alpha+3}\ 5^{\beta}\ 7^{\gamma}$$

Y en virtud de la fórmula [5]:

$$\left.\begin{aligned}(\alpha+1)(\beta+2)(\gamma+1) &= (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1) + 8\\ (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+2) &= (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1) + 12\\ (\alpha+4)(\beta+1)(\gamma+1) &= (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1) + 18\end{aligned}\right\}$$

es decir

$$\left.\begin{aligned}(\alpha+1)(\gamma+1) &= 8\\ (\alpha+1)(\beta+1) &= 12\\ 3(\beta+1)(\gamma+1) &= 18\end{aligned}\right\} \qquad [6]$$

Dividiendo la última por 3 y multiplicando las tres se obtiene

$$[(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)]^2 = 8 \cdot 12 \cdot 6 = 2^6 \cdot 3^2$$

o sea

$$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1) = 2^3 \cdot 3 = 24$$

Dividiendo ésta por cada una de las ecuaciones [6] sale sucesivamente

$$\beta + 1 = 3; \quad \beta = 2$$
$$\gamma + 1 = 2; \quad \gamma = 1$$
$$\alpha + 1 = 4; \quad \alpha = 3$$

Luego

$$N = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = \mathbf{1400}$$

EJEMPLO 2.—*El m. c. m. de dos números es 1260 y su m. c. d. es 35. Hallarlos, sabiendo que ambos son mayores que 100.*

$$\text{m. c. m. } (a, b) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$
$$\text{m. c. d. } (a, b) = 5 \cdot 7$$

Esto nos indica que 5 y 7 son factores comunes a los dos números a y b, y, en cambio, 2^2 y 3^2 entran sólo en uno de ellos y cada cual en uno distinto, pues ambos han de ser mayores que 100 Luego,

$$a = 5 \cdot 7 \cdot 2^2 = \mathbf{140}$$
$$b = 5 \cdot 7 \cdot 3^2 = \mathbf{315}$$

EJEMPLO 3.—*Hallar dos números cuyo producto es 5850 y su m. c. d. 15.*

Según el número 76, se sabe que: $5850 = a' \cdot 15 \cdot b' \cdot 15 = a' \cdot b' \cdot 225$;

$$a' \cdot b' = \frac{5850}{225} = 26 = 1 \cdot 26 = 2 \cdot 13.$$

Ha de cumplirse la condición de que a' y b' son primos entre sí.

Luego son posibles las dos soluciones siguientes:

1.ª $a = 1 \cdot 15 = \mathbf{15}$; $b = 26 \cdot 15 = \mathbf{390}$
2.ª $a = 2 \cdot 15 = \mathbf{30}$; $b = 13 \cdot 15 = \mathbf{195}$

EJEMPLO 4.—*Hallar dos números cuyo cociente es* $\frac{26}{34}$ *y su m. c. d. es 40.*

Llamando a y b los números pedidos, será:

$$\frac{a}{b} = \frac{26}{34} = \frac{13}{17}$$

Luego

$$a = 13 \cdot 40 = \mathbf{520}; \quad b = 17 \cdot 40 = \mathbf{680}$$

EJERCICIOS

1. ¿Cuál es el menor número que al ser dividido separadamente por 15, 20, 48 y 36, en cada caso, da 9 de resto?
2. Hallar el menor número, mayor que 6, que da el resto 6 al ser dividido por 15, 35 ó 42.
3. Hallar el m. c. d. de 1 h. 7 m. 47 seg. y 7 h. 32 seg.
4. Hallar entre 20000 y 35000 el menor y el mayor número que divididos por cada uno de los números 36, 54 y 90 dan por resto 12.
5. Hallar el menor número que dividido por 11 da 6 de resto; y dividido por 17 da 12 de resto; y dividido por 29 da 24 de resto.
6. Al dividir los números 1630 y 2460 por a se hallan los restos 18 y 16. Determinar a.
7. Hallar los números enteros que divididos por $\frac{4}{105}$ y $\frac{6}{35}$ dan cocientes enteros.
8. Obtener el menor cubo perfecto que es exactamente divisible por 42, 56, 154, 231 y 484. (Descomponer en factores los números.)
9. Hallar el mayor y el menor número de seis cifras que son exactamente divisibles por 789.
10. ¿Cuántos números mayores de 100 y menores que 1000 son divisibles por 5?
11. Si el m. c. d. de dos números, uno de los cuales está entre 2000 y 2500, es 51, y el m. c. m. es 148461, hallar los números.
12. Dividir 1904 en dos partes, de modo que el m. c. d. sea 28 y el m. c. m. 32340.
13. Hallar los tres mayores números tales que su m. c. d. sea 11 y su m. c. m. sea 5005.
14. El producto de dos números es 10800 y su m. c. d. 60. Hallar estos números.
15. Hallar dos números cuyo m. c. d. es 15 y el m. c. m. 360.
16. Hallar dos números cuyo m. c. m. es 1188 y el m. c. d. 9.
17. Hallar dos números cuyo cociente es igual a $\frac{33}{21}$ y el m. c. d. igual a 90.
18. Dado un número de tres cifras se sabe que la de las centenas es 3 y la de las decenas 9. Hallar dicho número sabiendo que es divisible por 11.
19. Hallar dos números cuyo máximo común divisor es 18, uno con 21 divisores y otro con 10 divisores.
20. Hallar un número N, compuesto de los factores primos 2, 3 y 5, sabiendo que se le suprimen 24 divisores al dividirle por 2, se le suprimen 18 divisores al dividirle por 3, y se le quitan 12 divisores al dividirle por 5.
21. Hallar un número entero N, sabiendo que es cubo perfecto, que admite 16 divisores y que dividido por 43 da un cociente primo y un resto igual a la unidad.
22. Tres comerciantes invierten la misma cantidad en la compra de mercancías de distinta clase. Vendidas éstas totalmente, cada uno divide el im-

porte invertido en la compra por el beneficio que ha obtenido, resultando: para el primero, 4 de cociente y 3 de resto; para el segundo, 7 de cociente y 6 de resto, y para el tercero, 10 de cociente y 1 de resto por exceso. Hallar el importe de la compra y de la ganancia de cada uno, sabiendo que la suma de dichas ganancias está comprendida entre 200 y 250 pesetas.

23. Hallar un número entero *N*, sabiendo que es cuadrado perfecto, que tiene 9 divisores y que si se le divide por 11 da un cociente primo y un resto igual a 9.

24. Hallar dos números conociendo su suma 127008 y sabiendo que tienen 45 divisores comunes.

25. Hallar dos números sabiendo que tienen 24 divisores comunes y que su producto es 388800.

26. Dos reglas divididas en partes iguales están aplicadas la una a la otra y tienen un extremo común. Las divisiones de la primera valen 18 mm., y las de la segunda 42 mm. ¿En qué trazos coincidirán las dos reglas, si su longitud es de 1'5 m.?

27. ¿Cuál es el menor número no divisible por 4, 6, 9, 11 y 12, que al dividirlo por dichos números dé restos iguales?

28. Un solar que sirve de depósito para una fábrica está rodeado de una alambrada. El terreno es un rectángulo de 19040 cm. de largo por 2720 centímetros de ancho. El cierre está sostenido por estacas distantes entre sí de 200 a 300 cm., de modo que haya una en cada esquina y en el medio de cada lado. ¿Cuántas estacas hay?

29. Hallar dos números, sabiendo que tienen 8 divisores comunes y que su m. c. m. vale 70091.

30. Hallar dos números, sabiendo que tienen 4 divisores comunes y que su m. c. m. es 210.

31. Determinar un número *N*, cuyos factores primos son 2, 3 y 5, y tal que 125 *N* tiene doble número de divisores que *N*; 81 *N*, triple, y 4096 *N*, cuádruple.

7

NUMEROS CONGRUENTES

92. La relación de congruencia.

Supongamos que un determinado año el día 1 de enero cae en lunes , el 2 en martes, el 3 en miércoles, etc. Si numeramos los días del año del 1 a 365, y queremos saber en qué día de la semana cae un día cualquiera, basta dividir por 7 el número que lo representa y ver cuál es el resto de la división.

Por ejemplo:

día 27; $27 = 7 \cdot 3 + 6$ sábado
día 108; $108 = 7 \cdot 15 + 3$ miércoles
día 162; $162 = 7 \cdot 23 + 1$ lunes
día 266; $266 = 7 \cdot 37 + 0$ domingo

En este problema, más que el número en sí, interesa saber el resto que da al dividirlo por 7. Todos los números que dan el mismo resto, al dividirlos por 7, corresponden a días del año que caen en el mismo día de la semana.

Dos números que dan el mismo resto al dividirlos por 7, se dice que son *congruentes módulo* 7. En general: *si* a *y* b *son dos números enteros que dan el mismo resto no negativo al dividirlos por el entero* m $\neq 0$, *se dice que son* CONGRUENTES MÓDULO M, y se escribe

$$a \equiv b \text{ (mód. m)}$$

Tenemos, pues, la doble implicación

$$\left.\begin{array}{l} a = mq + r \\ b = mq' + r \end{array}\right\} \; 0 \leqslant r < |m| \;\Leftrightarrow a \equiv b \text{ (mód. } m)$$

Las congruencias aparecen con frecuencia en la vida diaria: las manecillas de un reloj indican la hora módulo 12; el cuentakilóme-

tros de un coche da el total de km. recorridos módulo 100.000; si pasamos las hojas de un libro de 4 en 4, leemos, por ejemplo, los números 1, 5, 9, 13, ..., que son congruentes módulo 4.

Los números congruentes módulo m suelen representarse sobre una circunferencia dividida en m partes iguales.

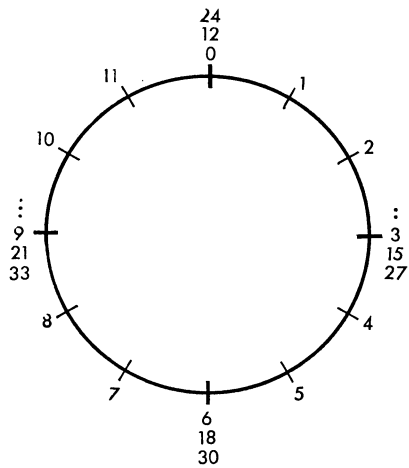


FIGURA 18

Cualquier entero dividido por m da de resto uno de los m números 0, 1, 2, 3, ..., $m - 1$ que aparecen situados a intervalos iguales sobre la circunferencia.

En la figura 18 se han representado los números congruentes módulo 12.

EJEMPLOS:

$$-24 \equiv -12 \equiv 0 \equiv 12 \equiv 24 \equiv \ldots \text{ (mód. 12)}$$
$$-21 \equiv -9 \equiv 3 \equiv 15 \equiv 27 \equiv \ldots \text{ (mód. 12)}$$
$$-15 \equiv -3 \equiv 9 \equiv 21 \equiv 33 \equiv \ldots \text{ (mód. 12)}$$
$$-18 \equiv -6 \equiv 6 \equiv 18 \equiv 30 \equiv \ldots \text{ (mód. 12)}$$

De la definición se deduce que:

1.° *El dividendo y el resto de una división son congruentes respecto del divisor.*

2.° *Un múltiplo del módulo es congruente con cero respecto de dicho módulo.*

93. Clases residuales módulo *m*.

La relación de congruencia definida en el número anterior es una *relación de equivalencia*, ya que posee las propiedades siguientes:

1.ª *Reflexiva:*

$$\forall\ a,\ a \equiv a \text{ (mód. } m)$$

2.ª *Simétrica:*

$$(\forall a)\ (\forall b)\ (a \equiv b) \Rightarrow (b \equiv a)$$

3.ª *Transitiva:*

$$(\forall a)\ (\forall b)\ (\forall c)\ [a \equiv b \text{ (mód. } m) \text{ y } b \equiv c \text{ (mód. } m)] \Rightarrow \Rightarrow a \equiv c \text{ (mód. } m)$$

La relación de congruencia realiza, por tanto, una partición de Z en clases de equivalencia, denominadas *clases residuales módulo* m. Cada clase residual contiene todos los números enteros que son congruentes entre sí. El conjunto cociente, que representaremos por Z/m, contiene m clases residuales. En éstas tomaremos como elementos canónicos los propios restos, con lo que las clases se representan así:

$$\{0\},\ \{1\},\ \{2\},\ \ldots,\ \{m-1\}$$

indicando por $\{0\}$ el conjunto de los números que dan resto cero al dividirlos por m, o sea,

$$\{0\} = \{\ldots, -2m, -m, 0, m, 2m, \ldots\}$$

Análogamente

$$\{1\} = \{\ldots, -2m+1, -m+1, 1, m+1, 2m+1, \ldots\}$$

EJEMPLO.—Si consideramos los números congruentes módulo 4, clasificamos todos los números enteros en 4 clases residuales, según que su *resto al* dividirlo por 4 sea 0, 1, 2 ó 3. Tomando estos restos como elementos canónicos de sus clases respectivas, éstas serán:

$$\begin{aligned}
\{0\} &= \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\} \\
\{1\} &= \{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots\} \\
\{2\} &= \{\ldots, -6, -2, 2, 6, 10, \ldots\} \\
\{3\} &= \{\ldots, -5, -1, 3, 7, 11, \ldots\}
\end{aligned}$$

94. Teorema fundamental de las congruencias.

La condición necesaria y suficiente para que dos números sean congruentes respecto de un módulo m, *es que su diferencia sea múltiplo de éste.*

La condición es necesaria, pues si $a \equiv b$ (mód. m), será

$$\begin{aligned} a &= mq + r \\ b &= mq' + r \end{aligned}$$

y restando

$$a - b = m\,(q - q') = \dot{m}$$

La condición es suficiente, pues si $a - b = \dot{m} = mk$, es decir, si

$$a = b + mk$$

y designamos por q el cociente y por r el resto de la división de b por m, tendremos

$$b = mq + r$$

Luego

$$a = mq + r + mk = m\,(q + k) + r$$

lo que demuestra que es también r el resto de la división de a por m.

95. Suma de congruencias.

Si se suman algebraicamente miembro a miembro varias congruencias respecto del mismo módulo, resulta otra congruencia respecto de dicho módulo.

En efecto, de las congruencias

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv a' \\ b \equiv b' \\ c \equiv c' \\ \cdots\cdots\cdots \\ l \equiv l' \end{array}\right\} \text{(mód. } m\text{)}$$

se deduce

$$\begin{aligned} a &= a' + \dot{m} \\ b &= b' + \dot{m} \\ c &= c' + \dot{m} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ l &= l' + \dot{m} \end{aligned}$$

Y sumando, y teniendo en cuenta que la suma de varios múltiplos de m es otro múltiplo de m, resulta

$$a + b + c + \ldots + l = a' + b' + c' + \ldots + l' + \dot{m}$$

es decir

$$a + b + c + \ldots + l \equiv a' + b' + c' + \ldots + l' \text{ (mód. } m)$$

De este teorema se deducen las siguientes consecuencias:

1.º *Se puede sumar o restar a los dos miembros de una congruencia un mismo número.*

Porque si

$$a \equiv b \text{ (mód. } m)$$

como siempre es

$$c \equiv c \text{ (mód. } m)$$

resulta en virtud del teorema anterior

$$a \pm c \equiv b \pm c \text{ (mód. } m)$$

2.º *Se puede multiplicar los dos miembros de una congruencia por un mismo número.*

En efecto, escribiendo c veces la congruencia

$$a \equiv b \text{ (mód. } m)$$

y sumando miembro a miembro resulta

$$a \cdot c \equiv b \cdot c \text{ (mód. } m)$$

96. Producto de congruencias.

Multiplicando miembro a miembro varias congruencias del mismo módulo resulta otra congruencia respecto de dicho módulo.

De las congruencias

$$\left.\begin{aligned} a &\equiv a' \\ b &\equiv b' \end{aligned}\right\} \text{ (mód. } m)$$

se deduce

$$\begin{aligned} a &= a' + \dot{m} \\ b &= b' + \dot{m} \end{aligned}$$

y multiplicando ordenadamente

$$ab = a'b' + \dot{m}$$

Es decir

$$ab \equiv a'b' \text{ (mód. } m)$$

Si las congruencias son tres o más, se multiplican las dos primeras; la que resulta, por la tercera; la que resulta, por la cuarta, etc.

Como consecuencia de este teorema, se deduce que: *Si se elevan a una misma potencia los dos miembros de una congruencia, resulta otra congruencia.*

En efecto, escribiendo c veces la congruencia

$$a \equiv b \text{ (mód. } m)$$

y multiplicando miembro a miembro todas ellas, resulta

$$a^c \equiv b^c \text{ (mód. } m)$$

97. El anillo de las clases residuales módulo m.

En el conjunto Z/m de las clases residuales módulo m, definamos la operación de *adición* de la siguiente forma:

$$\{a\} + \{b\} = \{a + b\}$$

Esta suma es independiente de los representantes elegidos, pues si

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv a' \\ b \equiv b' \end{array}\right\} \text{ (mód. } m) \Rightarrow a + b \equiv a' + b' \text{ (mód. } m)$$

según el número 95. O sea, la operación así definida es *uniforme;* es, además, *conmutativa* y *asociativa,* como consecuencia de haber definido la adición de clases como adición de enteros; posee *elemento neutro,* que es la clase $\{0\}$, ya que

$$\{a\} + \{0\} = \{a\}$$

Cualquier clase $\{a\}$ posee un *elemento simétrico* $\{-a\}$, pues

$$\{a\} + \{-a\} = \{0\}$$

Si se quiere operar con elementos canónicos exclusivamente, la clase simétrica de $\{a\}$ es la $\{m - a\}$, ya que

$$\{a\} + \{m - a\} = \{m\} = \{0\}$$

En el conjunto Z/m de clases residuales módulo m definamos ahora la *multiplicación* de la siguiente forma:

$$\{a\} \cdot \{b\} = \{a \cdot b\}$$

El producto es independiente de los representantes elegidos en virtud del número 96. Es decir, la operación así definida es *uniforme;* es también *conmutativa* y *asociativa* en razón de haberla definido mediante el producto de enteros; posee *elemento neutro,* que es la clase {1}, ya que

$$\{a\} \cdot \{1\} = \{a\}$$

En general, una clase $\{a\}$ no tiene elemento simétrico, como veremos por los ejemplos.

Además, se cumple la *ley distributiva* de la multiplicación respecto de la adición

$$(\{a\} + \{b\})\ \{c\} = \{a + b\} \cdot \{c\} = \{(a + b) \cdot c\} =$$
$$= \{a \cdot c + b \cdot c\} = \{a \cdot c\} + \{b \cdot c\} = \{a\} \cdot \{c\} + \{b\} \cdot \{c\}$$

Por tanto, las dos leyes de composición interna adición y multiplicación de clases residuales verifican las propiedades I, II, III y IV del número 54, y las I', II' III' y IV' (núms. 61 y 62) que caracterizan a los anillos conmutativos con elemento unidad, y podemos enunciar:

El conjunto Z/m *de clases residuales módulo* m *es un anillo conmutativo con elemento unidad.*

Observemos que es el primer ejemplo que se nos presenta de anillo sobre un conjunto finito.

EJEMPLOS.—1.º El caso más sencillo se obtiene para $m = 2$. El anillo de clases residuales comprende dos elementos: {0} y {1}. El primero corresponde a los números pares y el segundo a los impares.

Las tablas de adición y multiplicación son las siguientes:

+	{0}	{1}
{0}	{0}	{1}
{1}	{1}	{0}

×	{0}	{1}
{0}	{0}	{0}
{1}	{0}	{1}

Expresan los siguientes hechos bien conocidos de la teoría de números enteros:

par + par = impar + impar = par
par + impar = impar
par × par = par × impar = par
impar × impar = impar

2.º Las clases residuales para $m = 4$ son $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$ y $\{3\}$. He aquí las tablas de adición y multiplicación:

+	{0}	{1}	{2}	{3}
{0}	{0}	{1}	{2}	{3}
{1}	{1}	{2}	{3}	{0}
{2}	{2}	{3}	{0}	{1}
{3}	{3}	{0}	{1}	{2}

×	{0}	{1}	{2}	{3}
{0}	{0}	{0}	{0}	{0}
{1}	{0}	{1}	{2}	{3}
{2}	{0}	{2}	{0}	{2}
{3}	{0}	{3}	{2}	{1}

Observamos la particularidad de que

$$\{2\} \cdot \{2\} = \{0\}$$

El producto de dos clases es el elemento nulo, sin serlo ninguno de los factores.

98. Dominio de integridad.

Existen anillos en los que ciertos elementos no nulos dan como producto cero: se les llama *divisores de cero*. Por ejemplo, en el anillo de las clases residuales módulo 4 la clase $\{2\}$ es un divisor de cero, ya que se vio en el número anterior que

$$\{2\} \cdot \{2\} = \{0\}$$

En cambio existen otros anillos que no tienen dicha propiedad, o sea que en ellos el hecho de que el producto de dos elementos sea igual a cero implica que uno de ellos tiene que ser nulo.

Tal sucede, por ejemplo, con el anillo Z de los números enteros. En él, siendo a, b y c números distintos de cero, se verifica que

$$ac = bc \Rightarrow ac - bc = 0 \Rightarrow c(a - b) = 0$$

y siendo $c \neq 0$, ha de ser

$$a - b = 0 \Rightarrow a = b$$

Por tanto

$$ac = bc \Rightarrow a = b$$

O sea, en estos anillos, llamados *anillos de integridad*, se verifica la *ley de simplificación*, la cual no se realiza en los anillos que no son de integridad.

Se encuentran a menudo anillos de integridad que tienen elemento unidad, o sea, elemento neutro de la multiplicación. Se les llama *dominios de integridad*.

Se puede, por tanto, enunciar:

El anillo Z de los números enteros es un dominio de integridad.

Lo mismo se puede decir del anillo Z/m de las clases residuales módulo m, cuando m es primo.

En efecto, si se verifica

$$\{a\} \cdot \{b\} = \{0\}$$

esto implica que

$$\{ab\} = \{0\} \Rightarrow a \cdot b \equiv 0 \ (m)$$

o sea $a \cdot b = \dot{m}$. Entonces pueden ocurrir dos casos: 1.º) $a = \dot{m}$, luego $\{a\} = 0$; 2.º) $a \neq \dot{m}$, luego a y m son primos entre sí, y según el teorema de Euclides (núm. 75, 3.ª), $b = \dot{m}$, o sea $\{b\} = \{0\}$.

Por tanto, el hecho de que $\{a\} \cdot \{b\} = \{0\}$ implica que uno de los dos factores ha de ser nulo. Se cumple la ley de simplificación, y *el anillo* Z/m *es un dominio de integridad,* siempre que m sea primo.

Si m no es primo, esta regla no es válida. Si, por ejemplo, es $m = p \cdot q$, se verifica por ser p y q menores que m

$$p \not\equiv 0 \ (\text{mód. } m) \quad : \quad q \not\equiv 0 \ (\text{mód. } m)$$

y, sin embargo,

$$m = p \cdot q \equiv 0 \ (\text{mód. } m)$$

es decir,

$$\{p\} \cdot \{q\} = \{0\}$$

El conjunto de las clases residuales módulo m *es un dominio de integridad si, y sólo si,* m *es primo.*

99. Restos potenciales.

Se llaman *restos potenciales* de un número a, con relación a otro m, los restos que resultan de dividir por el segundo las sucesivas potencias del primero, $a^0, a^1, a^2, \ldots, a^k, \ldots$

Así, por ejemplo, los restos potenciales de 5 con respecto a 3 son los restos de $5^0, 5^1, 5^2, 5^3, \ldots$, divididos por 3, o sea, 1, 2, 1, 2 ...

Aunque el número de potencias de un número es ilimitado sus restos potenciales con respecto a otro número tienen que ser menores que éste, por lo cual el número de restos distintos es finito.

Sabemos que si es r el resto de dividir a^k por m, o sea

$$a^k \equiv r \ (\text{mód. } m)$$

multiplicando esta congruencia por a, sale

$$a^{k+1} \equiv ra \ (\text{mód. } m)$$

lo que demuestra la siguiente

REGLA.—*Para determinar cualquiera de los restos potenciales de* a *respecto de* m, *se multiplica el anterior resto por* a *y se divide el producto por* m, *obteniéndose el resto pedido.*

Así los restos potenciales de 4, respecto de 11, son: $r_0 = 1$; $r_1 = 1 \cdot 4 = 4$; $r_2 = 4 \cdot 4 - 11 = 5$; $r_3 = 5 \cdot 4 - 22 = -2$; $r_4 = -2 \cdot 4 + 11 = 3$; $r_5 = 3 \cdot 4 - 11 = 1$.

A partir del último, se repiten todos los restos potenciales.

De la anterior regla se deducen las siguientes *consecuencias:*

1.° *Si alguno de los restos potenciales es nulo, lo son también todos los siguientes.*

2.ª *A partir del primer resto que se repita se reproducen en igual orden los mismos restos indefinidamente.*

En este último caso, el grupo de restos que se repite se llama *período*; la sucesión se llama periódica, siendo *periódica pura* o *periódica mixta*, según que el período comience o no en el primer resto.

EJEMPLOS.—*Hallar los restos potenciales de 10 respecto a 8, respecto a 37 y respecto a 12.*

Solución: Para hallar los restos potenciales de 10, las multiplicaciones a que se refiere la regla anterior se reducen a escribir un cero a derecha del primer resto y de los que sucesivamente se obtienen. Por tanto, basta efectuar las siguientes divisiones:

10	8
20	1'25
40	
0	

100	37
260	0'27027
100	
260	
1	

100	12
40	0'833
40	
4	

Con respecto al módulo 8, los restos potenciales son: 2, 4, 0, 0..., siendo nulos todos desde el tercero en adelante.

Respecto al módulo 37, son: 10, 26, 1, 10, 26, 1..., sucesión que es periódica pura, siendo el período 10, 26, 1.

Respecto al módulo 12, son: 10, 4, 4..., que forman una sucesión periódica mixta, de período 4.

100. Reglas prácticas para el cálculo abreviado de los restos potenciales.

1.° Dado que $N = \dot{m} + r$, siendo $r < m$, se tiene

$$N \equiv r \text{ (mód. } m)$$

y elevando a la potencia p (número 96):

$$N^p \equiv r^p \text{ (mód. } m)$$

Luego basta hallar los restos de las potencias sucesivas de r en lugar de hallar las de N.

2.° Tomaremos los restos por exceso cuando son menores en valor absoluto que los restos por defecto.

EJEMPLO 1.—*¿Qué resto da* 4577^{394} *al dividirlo por 11?*

Solución: Ya que es $4577 = 11 + 1$, basta hallar los restos potenciales de 1, que son todos iguales a la unidad. Luego el resto de 4577^{394} es 1.

EJEMPLO 2.—*¿Qué resto da* 125^{4577} *al dividirlo por 11?*

Solución: Ya que es $125 = 11 + 4$, bastará hallar los restos potenciales de 4 respecto a 11. Están hallados en el número 99; y son: $r_0 = 1$; $r_1 = 4$; $r_2 = 5$; $r_3 = -2$; $r_4 = 3$; $r_5 = 1$. Forman una sucesión periódica pura, constando el período de 5 términos. Y como $4577 = 5 + 2$, resulta que 4^{4577} dará el mismo resto que 4^2, o sea 5.

101. Caracteres de divisibilidad: teorema fundamental.

Dado un número cualquiera

$$N = l \ldots dcba$$

escrito en el sistema de base 10, es decir,

$$N = a + b10 + c10^2 + \ldots + l10^\lambda$$

llamemos $r_1, r_2, r_3, \ldots$, los restos potenciales de 10 respecto a un módulo m cualquiera, o sea:

$$10^0 \equiv 1 \quad , \quad 10^1 \equiv r_1 \quad , \quad 10^2 \equiv r_2 \qquad \ldots 10^\lambda \equiv r_\lambda \ (\text{mód. } m)$$

multiplicando estas congruencias por $a, b, c, d, \ldots, l$, respectivamente, y sumándolas (núm. 95), se obtiene:

$$N \equiv a + br_1 + cr_2 + dr_3 + \ldots + lr_\lambda \ (\text{mód. } m)$$

Por tanto: *el resto (mód.* m*) del número* N = l ... cba, *escrito en el sistema de base* 10, *es el mismo que el de la suma de los productos de sus cifras* a, b, c, ..., l, *por los restos de las potencias sucesivas* $10^0, 10^1, 10^2, 10^3, \ldots$

Se deduce como consecuencia que: *la condición necesaria y suficiente para que* N *sea divisible por* m *es que lo sea el número así formado.*

Hemos de añadir que cuando convenga se pueden utilizar algunos

restos por exceso, en vez de los restos por defecto. Por ejemplo, sea r'_2 el resto por exceso de 10^2; será $r_2 = m - r'_2$, y en consecuencia

$$N \equiv a + br_1 + c\,(m - r'_2) + \ldots + lr_\lambda \equiv a + br_1 - cr'_2 + \ldots + lr_\lambda \pmod{m}$$

ya que cm es múltiplo de m.

Si algún resto por exceso es menor que el resto por defecto, convendrá utilizar aquél en vez de éste, restando en vez de sumar el producto por la cifra respectiva.

102. Criterios de divisibilidad en el sistema decimal.

Apliquemos el teorema anterior a la investigación de criterios de divisibilidad de un número cualquiera en el sistema decimal, con relación a los módulos 2, 5, 4, 25, 3, 9 y 11.

Módulos 2 y 5.—Sea el número 584. Como 10, 10^2, 10^3 son divisibles por 2 y por 5, resulta que los restos potenciales de 10, lo mismo con relación a 2 que con relación a 5, son todos nulos, a excepción del de 10^0, que vale uno. Luego

$$584 \equiv 4 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 4 \pmod{2}$$
$$584 \equiv 4 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 4 \pmod{5}$$

La condición necesaria y suficiente para que un número sea divisible por 2 es que termine en cero o en cifra par.

La condición necesaria y suficiente para que un número sea divisible por 5 es que termine en cero o en 5.

Módulos 4 y 25.—Los restos potenciales de 10 respecto a 4 son: $r_0 = 1$, $r_1 = 2$, $r_2 = 0$, ...; y respecto a 25: $r_0 = 1$, $r_1 = 10$, $r_2 = 0$, ... Luego

$$584 \equiv 4 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 5 \cdot 0 = 4 + 8 \cdot 2 \pmod{4}$$
$$584 \equiv 4 \cdot 1 + 8 \cdot 10 + 5 \cdot 0 = 84 \pmod{25}$$

O sea: *la condición necesaria y suficiente para que un número sea divisible por 4 es que lo sea la suma de la cifra de unidades más el duplo de las decenas.*

Para que un número sea divisible por 25 basta que lo sea el número formado por las dos últimas cifras.

Módulos 3 y 9.—Los restos potenciales de 10, tanto con relación a 3 como con relación a 9, son todos iguales a 1. Luego

$$584 \equiv 4 + 8 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 4 + 8 + 5 \pmod{3}$$
$$584 \equiv 4 + 8 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 4 + 8 + 5 \pmod{9}$$

Para que un número sea divisible por 3 o por 9 es necesario y suficiente que lo sea la suma de sus cifras.

MÓDULO 11.—Los restos potenciales de 10, módulo 11, son alternativamente 1 y — 1. Luego

$$16584 \equiv 4 - 8 + 5 - 6 + 1 \text{ (mód. 11)}$$

Para que un número sea divisible por 11 es necesario y suficiente que la suma de las cifras de lugar impar menos la de las cifras de lugar par dé cero, 11 o múltiplo de 11.

EJERCICIOS

1. ¿Qué números de la sucesión

   4, 10, 28, 38, 60, 73

   son congruentes con 3 módulo 7?

2. ¿Se pueden dividir miembro a miembro dos congruencias respecto al mismo módulo? Da algún ejemplo.

3. Halla la expresión de todos los números congruentes con 24 módulo 7.

4. Dados los números 27 y 39, halla todos los valores del módulo m respecto del cual son congruentes dichos números.

5. ¿Cuáles son los *divisores del cero* en el anillo de las clases residuales módulo 6?

6. Halla los *divisores del cero* en el anillo de las clases residuales módulo 12.

7. Hallar el valor del resto que da $9^{6n+1} + 3^{2n+1} \cdot 487^{2n} - 10$, al dividirlo por 730.

8. Hallar el criterio de divisibilidad de un número por 7.

9. Hallar el criterio de divisibilidad de un número por 17.

10. Establecer el criterio de divisibilidad de un número por 4 en el sistema de numeración de base 8. Idem por 7.

11. Hallar el resto de la división por 13 de 311^{311}.

12. Hallar el resto de la división por 11 del número 128^{14}.

13. Sabiendo que el número $13xy45z$ es divisible por 792, hallar qué cifras son x, y, z.

14. Determinar las cifras x e y, de manera que el número $28x75y$ sea divisible por 33.

15. Sabiendo que el número $2x45y$ es múltiplo de 72, determinar las cifras x e y.

16. Siendo n un número entero cualquiera, demostrar que la expresión $n \cdot (n + 2) \cdot (5n - 1) \cdot (5n + 1)$ es múltiplo de 24.

17. ¿Qué cifras pueden escribirse a la derecha de los números 25 y 86, para que resulten números de tres cifras divisibles, simultáneamente, por 4 y por 9?

18. Hallar el mayor múltiplo común a 25 y 86 que sea de 4 cifras.

19. a) Halla el criterio de divisibilidad por 101, por medio de los restos de las potencias de 10, módulo 101.
b) Determina razonadamente las cifras x e y, para que el número $A = 7x1y4$, en base decimal, sea divisible por 101 y por 11.

20. En base 7, deduce los criterios de divisibilidad por $6_{(7}$, por $11_{(7}$ y por $14_{(7}$.

21. Deduce el criterio de divisibilidad por 13 en el sistema decimal, y determina el valor que debe darse a la cifra m en la expresión $8201m046$ para que resulte un número divisible por 13.

8

ECUACIONES DIOFANTICAS

103. Definición.

Hay muchos problemas de la vida ordinaria que se resuelven mediante ecuaciones de varias incógnitas con coeficientes enteros y cuyas soluciones han de ser también números enteros. Tales ecuaciones se llaman *diofánticas,* en honor de Diofanto, matemático de Alejandría (siglo IV), que se dedicó a tales cuestiones.

EJEMPLO.—*Compramos libros de 68 ptas. y otros de 76 ptas., pagando en total 1176 ptas. ¿Cuántos libros hemos adquirido de cada precio?*

Llamando x el número de libros de la primera clase, e y el número de libros del segundo precio, se tiene la ecuación

$$68x + 76y = 1176 \qquad [1]$$

En esta ecuación todos los coeficientes son enteros, y los valores de x e y que satisfacen a la misma, si existen, también han de ser enteros. Se trata de una *ecuación diofántica.*

Ecuación diofántica es una ecuación algebraica de coeficientes enteros y de la que interesan únicamente las soluciones enteras.

Hay muy diversos tipos de ecuaciones diofánticas, pero las más sencillas y corrientes son las ecuaciones lineales con dos incógnitas, de la forma

$$Ax \pm By = C$$

104. Ecuación lineal $Ax - By = C$.

Se trata de resolver la ecuación

$$Ax - By = C \qquad [2]$$

Si A y B no son primos entre sí, y es D su m. c. d., si existen valores naturales $x = \alpha$, $y = \beta$, que satisfacen a la ecuación, el primer miembro será múltiplo de D; luego ha de serlo también C. Por tanto, *es condición necesaria para que la ecuación* [2] *tenga solución que el segundo miembro* C *sea divisible por el m. c. d. de* A *y* B.

Cumplida esta condición, dividiremos los dos miembros por D. Así, obtenemos la ecuación

$$ax - by = c \qquad [3]$$

en la que a y b son primos entre sí.

Vamos a demostrar que esta ecuación admite siempre soluciones enteras. En efecto, puesta la ecuación [3] en la forma

$$ax = c + by \qquad [4]$$

demos a y los valores consecutivos

$$0, 1, 2, 3, \ldots a - 1$$

obteniéndose los a números correspondientes

$$c, \quad c + b, \quad c + 2b, \quad c + 3b, \quad \ldots \quad c + (a - 1)\, b \qquad [5]$$

los cuales vamos a ver que dan todos restos distintos al dividirlos por a.

En efecto, si dos de ellos $c + hb$ y $c + kb$, *siendo* $h < k < a$, diesen el mismo resto, su diferencia sería

$$(c + kb) - (c + hb) = (k - h)\, b = \dot{a}$$

pero como a es primo con b, según el teorema de Euclides tendría que ser $k - h = \dot{a}$, lo cual es imposible, pues $h \neq k$, y ambos son menores que a.

Y ya que al dividir por a sólo pueden obtenerse a restos distintos, uno, y sólo uno, de los a números [5] dará el resto 0. Sea éste, por ejemplo el $c + \beta\, b$, y sea α el cociente de dividirlo por a. Resulta:

$$a\alpha = c + \beta b \quad ; \quad a\alpha - b\beta = c$$

siendo $x = \alpha$, $y = \beta$ una solución particular de la ecuación [4].

EJEMPLO.—*Hallar una solución particular de la ecuación*

$$15x - 130y = 35$$

Solución: Simplificando queda

$$3x - 26y = 7$$

La aplicación del método seguido en la demostración resulta con frecuencia engorroso. El genial matemático EULER ideó un método sencillo y práctico para determinar una solución particular. Consiste en despejar la incógnita que

tiene coeficiente más pequeño, en este caso la x, efectuando a continuación el cociente del segundo miembro; así

$$x = \frac{7 + 26y}{3} = 2 + \frac{1}{3} + 8y + \frac{2y}{3} = 2 + 8y + \frac{1 + 2y}{3}$$

El último término ha de ser un número entero, pero por ser tan sencillo el cociente $\frac{1 + 2y}{3}$ es fácil ver que para $y = 1$, sale $\frac{1 + 2y}{3} = 1$. Por tanto

$$x = 2 + 8 \cdot 1 + 1 = 11$$

Una solución particular es $x = 11$, $y = 1$.

105. Solución general de la ecuación diofántica lineal $Ax - By = C$.

Hallada, como se ha visto, una solución particular, $x = \alpha$, $y = \beta$, de la ecuación [3]

$$ax - by = c$$

se cumple

$$a\alpha - b\beta = c$$

Ahora es fácil hallar todas las soluciones de la misma. En efecto, restando miembro a miembro las dos igualdades anteriores:

$$a(x - \alpha) - b(y - \beta) = 0$$

o sea

$$a(x - \alpha) = b(y - \beta) \qquad [6]$$

y siendo b primo con a, debe dividir a $x - \alpha$; o sea

$$x - \alpha = bt; \qquad \mathbf{x = \alpha + bt} \qquad [7]$$

siendo t un número entero cualquiera. Sustituyendo este valor en [6], **sale**

$$y - \beta = at; \qquad \mathbf{y = \beta + at} \qquad [8]$$

EJEMPLO.—*Hallar la solución general de la ecuación propuesta en el número anterior.*

Solución: Aplicando las fórmulas [7] y [8] queda

$$\left.\begin{aligned} x &= 11 + 26t \\ y &= 1 + 3t \end{aligned}\right\}$$

A cada valor entero que demos a t, obtendremos un valor para x y otro para y.

106. Ecuación diofántica lineal $Ax + By = C$.

Del mismo modo que antes, *es condición necesaria y suficiente para que esta ecuación tenga solución que el segundo miembro* C *sea divisible por el m. c. d. de* A *y* B.

Cumplida esta condición, dividiremos los dos miembros por el m. c. d *D*, resultando

$$ax + by = c \qquad [9]$$

Hallada como anteriormente una solución particular

$$x = \alpha \quad ; \quad y = \beta$$

será

$$a\alpha + b\beta = c$$

y restando de [9]

$$a(x - \alpha) + b(y - \beta) = 0$$

o sea

$$a(x - \alpha) = -b(y - \beta)$$

De donde

$$\left.\begin{array}{ll} x - \alpha = bt & ; \quad \mathbf{x = \alpha + bt} \\ y - \beta = -at & ; \quad \mathbf{y = \beta - at} \end{array}\right\} \qquad [10]$$

EJEMPLO.—*Resolver la ecuación* [1] *del número* 103.

Solución: Simplificando:

$$17x + 19y = 294$$

Aplicando el método de Euler

$$x = \frac{294 - 19y}{17} = 17 - y + \frac{5 - 2y}{17}$$

Para

$$y = 11 \quad \text{es} \quad \frac{5 - 2y}{17} = -1$$

y por tanto,

$$x = 17 - 11 - 1 = 5$$

Solución general:

$$\left.\begin{array}{l} x = 5 + 19t \\ y = 11 - 17t \end{array}\right\}$$

107. Problemas de aplicación.

Los problemas diofánticos tienen, en general, infinitas soluciones. Las condiciones del problema limitan con frecuencia dicho número, como veremos en los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 1.—*Hallar el menor número de cuatro cifras que dividido por 4, 7 y 11 da de resto 3, y que dividido por 13 da de resto 1.*

Solución: Llamando N al número pedido, se tiene que $N - 3$ es múltiplo de 4, de 7 y de 11, o sea, de su m. c. m., que es 308. Por tanto

$$\left.\begin{aligned} N - 3 &= 308x \\ N - 1 &= 13y \end{aligned}\right\} \; N = 308x + 3 = 13y + 1$$

De aquí se deduce la ecuación

$$13y - 308x = 2$$

Aplicando el método de Euler

$$y = \frac{2 + 308x}{13} = 24x + \frac{2 - 4x}{13}$$

Para $x = 7$, es

$$\frac{2 - 4x}{13} = \frac{2 - 28}{13} = -2$$

Luego

$$y = 24 \cdot 7 - 2 = 166$$

Por tanto, la solución general es

$$\begin{aligned} x &= 7 + 13t \\ y &= 166 + 308t \end{aligned}$$

La solución más sencilla, en números positivos, es para $t = 0$, $x = 7$, $y = 166$. Luego

$$N = 308 \cdot 7 + 3 = \mathbf{2159}$$

EJEMPLO 2.—*Se han repartido 743 pesetas entre mujeres y niños. A cada mujer le corresponden 23 pesetas y a cada niño 12 pesetas. Averiguar cuántas mujeres y niños han entrado en el reparto.*

Solución: Llamando x e y los números de mujeres y niños, respectivamente, será

$$23x + 12y = 743$$

Aplicando el método de Euler:

$$y = \frac{743 - 23x}{12} = 62 - 2x + \frac{x - 1}{12}$$

Para $x = 1$, es

$$\frac{x-1}{12} = 0$$

y por tanto,

$$y = 62 - 2 = 60$$

La solución general es:

$$x = 1 + 12t$$
$$y = 60 - 23t$$

Como el problema ha de tener solución en números positivos, el mayor valor que puede darse a t es 2. Entonces

1.ª solución: **x = 25 mujeres; y = 14 niños**

Para $t = 1$

2.ª solución: **x = 13 mujeres; y = 37 niños**

Para $t = 0$

3.ª solución: **x = 1 mujer; y = 60 niños**

Para los demás valores de t las soluciones son negativas.

EJERCICIOS

1. Descomponer la fracción 103/35 en una suma de dos fracciones de denominadores respectivos 5 y 7.
2. Dividir 20 en dos partes tales que la primera sea divisible por 2 y la segunda por 3.
3. Dividir 200 en dos partes tales que la primera, aumentada en una unidad, sea divisible por 11, y la segunda, disminuída en una unidad, lo sea por 13.
4. Una mujer tiene un cesto de manzanas. Haciendo grupos de 3 sobran 2, y haciendo grupos de 4 sobran 3. Hallar el número de manzanas, sabiendo que eran de 100 a 110.
5. Un labrador compra patos y pollos. Cada pato costó 80 ptas. y cada pollo 30 ptas. ¿Cuántas aves compró de cada clase, sabiendo que el importe total fué de 640 ptas.?
6. Dividir el número 12 en tres partes de modo que la suma del doble de la primera, el triplo de la segunda y el quíntuplo de la tercera sea igual a 40.
7. Una reunión de 20 hombres, mujeres y niños consumen en un bar 670 pesetas; cada hombre, 50 ptas.; cada mujer, 40 ptas., y cada niño, 15 ptas. Cuántas personas de cada clase había?
8. Un cosechero tiene vino de varias clases; una clase, a 7 ptas. litro; otra mejor, a 10 ptas. litro. Obtiene de una venta 100 ptas. ¿Cuántos litros de cada clase ha vendido?

9. En una fábrica trabajan aprendices, mujeres y hombres con jornales de 20, 40 y 90 ptas., importando la nómina semanal 24.540 ptas. (6 días de trabajo). Suponiendo que el número de hombres sea igual al de mujeres y aprendices juntos, calcular el número de los de cada clase.

10. Hallar el menor múltiplo de 11, que dividido por 2, 3, 4, 5, 6 y 7 da siempre de resto 1.

11. Determinar la forma de todos los números tales que al dividirlos por 15 dan de resto 2, y al dividirlos por 11 dan de resto 7.

12. Hallar las soluciones enteras de la ecuación

$$\sqrt{(x + y)\,(x - y) + (2x + 2y - 3)\,y - 2(x - 7)} = x + y + 3$$

13. Hallar el menor término común a las tres progresiones aritméticas: 2, 11, 20, 29, ...; 7, 15, 23, 31, ..., 8, 19, 30, 41; ...

14. Un librero liquida hoy a un editor una partida de libros de dos clases, cuyos precios son, respectivamente, 69 y 57 ptas. libro. Después de quedarse con el 20 por 100 por comisión de venta, entrega al editor una letra a 5 meses vista, por la cual le corresponde cobrar hoy, descontada al 6 por 100, la cantidad exacta de 1455,48 pesetas. Hallar el número de libros de cada clase que ha vendido el librero.

15. Hallar los números de tres cifras, de las cuales la intermedia es 9 y valen 37 veces la suma de sus cifras.

16. Hallar el menor múltiplo de 13 que dividido sucesivamente por 3, 4, 5 y 6 da por restos respectivos 2, 3, 4 y 5.

17. Tres campanas tocan a intervalos de 25, 29 y 33 segundos, respectivamente. Antes de transcurrir media hora a partir de la primera campanada de las tres campanas, que fué dada simultáneamente, dejó de tocar la primera. La segunda y tercera cesaron de tocar a los 18 y 21 segundos, respectivamente, a partir de la última campanada de la primera. ¿Cuántas veces tocó cada campana?

18. Un fumador tiene 215 puros en paquetes de 3, 6 y 8 puros. Ha fumado todos los paquetes de 6 y otros tantos de 3. En el resto de los paquetes de 3 puros sólo queda un puro en cada uno. Los de 8 puros están intactos. Los cuenta y tiene 85 puros. ¿Cuántos paquetes tenía de cada clase?

19. Halla todos los números menores que 1000, que sean múltiplos de 28, y que divididos por 15 den resto 9.

20. Halla los valores naturales de n para los cuales la expresión

$$\frac{28n^3 + 56n + 90}{n^2 + 2}$$

toma valores naturales.

9

EL NUMERO RACIONAL: CONCEPTO DE CUERPO

108. Necesidad de ampliar el campo de los números enteros.

Vimos en el número 66 que la ecuación

$$bx = a \qquad [1]$$

solamente tiene solución en el anillo Z de los números enteros cuando existe el cociente exacto de a entre b. Entonces

$$x = \frac{a}{b}$$

es un número entero que puede expresarse por el cociente $\frac{a}{b}$. Pero hay otros muchos cocientes que también representan al número entero x. Son todos aquellos cocientes $\frac{a'}{b'}$ que satisfacen la condición

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \quad ; \quad \text{o sea} \quad ab' = a'b \qquad [2]$$

en virtud de las leyes formales demostradas para los números enteros (ley uniforme de la multiplicación).

En el caso en que no exista el cociente exacto de a entre b, la expresión $\frac{a}{b}$ carece de sentido dentro del campo de los números enteros, y la ecuación [1] no tiene solución.

Se comprende la necesidad de crear unos nuevos entes o números que permitan dar solución en todos los casos a la ecuación [1], y ello por un proceso de abstracción enteramente análogo al seguido para la creación de los números enteros a partir de los naturales.

Los nuevos entes van a ser todas las expresiones de la forma $\frac{a}{b}$, siendo a y b números enteros que denominaremos, respectivamente, *numerador* y *denominador*, enunciados en este orden, pero con la

condición de igualdad [2]. Además, el denominador ha de ser distinto de cero.

Por tanto, el numerador puede ser un elemento cualquiera del conjunto Z de los números enteros; el denominador pertenece al conjunto $Z^* = Z - 0$, esto es, al conjunto Z con exclusión del cero. A la expresión $\frac{a}{b}$ con estas condiciones se denomina *fracción.*

Una fracción es un elemento del conjunto producto $Z \times Z^*$. Daremos, pues, la siguiente definición general:

109. Relación de equivalencia en el conjunto producto $Z \times Z^*$.

Fracción es un par de números enteros, el segundo de ellos no nulo, dados en un orden determinado.

Dos fracciones, o elementos $\frac{a}{b}$ *y* $\frac{a'}{b'}$ *del conjunto producto* $Z \times Z^*$ *son equivalentes, si se tiene*

$$a \cdot b' = a' \cdot b \qquad [2']$$

o sea, cuando los productos cruzados son iguales.

Se expresa así

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Leftrightarrow a \cdot b' = a' \cdot b$$

Se trata, en efecto, de una *relación de equivalencia,* ya que es

1.° *Reflexiva:*

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \quad ; \quad \text{ya que} \quad a \cdot b = a \cdot b$$

2.° *Simétrica:* si

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

puesto que

$$a \cdot d = c \cdot b \Leftrightarrow c \cdot b = a \cdot d \Leftrightarrow \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

3.° *Transitiva:*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = c \cdot b$$

$$\frac{c}{d} = \frac{e}{f} \Leftrightarrow c \cdot f = e \cdot d$$

Multiplicando ordenadamente las dos últimas igualdades entre enteros, resulta

$$a \cdot d \cdot c \cdot f = c \cdot b \cdot e \cdot d \quad ; \quad a \cdot f = b \cdot e = e \cdot b$$

lo que implica

$$\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$$

110. Definición de número racional.

La relación de equivalencia anterior hace una partición del conjunto $Z \times Z^*$ en *clases de equivalencia.* Cada una de dichas clases se denomina *número racional. Número racional es un ente representado por una fracción y todas sus equivalentes;* o también *es la clase de las fracciones equivalentes entre sí.*

Al conjunto cociente $\frac{Z \times Z^*}{R}$, siendo R la relación de equivalencia dada en el número anterior, o sea, al conjunto de las clases de equivalencia, le llamaremos *conjunto* Q *de los números racionales.*

Un número racional viene definido por uno cualquiera de los representantes de su clase.

EJEMPLOS:

$$\alpha = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{16}{12} = \ldots = \left\{\frac{12}{9}\right\}$$

$$\beta = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = \frac{16}{20} = \frac{20}{25} = \ldots = \left\{\frac{8}{10}\right\}$$

$$\gamma = \frac{0}{5} = \frac{0}{6} = \frac{0}{7} = \frac{0}{10} = \ldots = \{0\}$$

Los números racionales, como los α, β y γ, se escriben poniendo entre llaves uno cualquiera de sus representantes. El número γ, cuyos representantes tienen todos cero por numerador es el número racional *cero.*

111. Representantes canónicos de los números racionales.

Si se multiplica o divide los dos términos de una fracción por el mismo número entero, se obtiene una fracción equivalente a la dada.

Así:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \quad ; \quad \frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n}$$

En efecto, según la relación de equivalencia

$$a \cdot b \cdot n = a \cdot n \cdot b \quad ; \quad a \cdot b : n = (a : n) \cdot b$$

De aquí deducimos las siguientes consecuencias:

1.ª *Todo número racional tiene representantes con denominador positivo,* ya que

$$\frac{a}{-n} = \frac{(-1)\,a}{(-1)\,(-n)} = \frac{-a}{n}$$

2.ª *Dos números racionales siempre tienen representantes con el mismo denominador.* Sean

$$\left\{\frac{a}{b}\right\} \text{ y } \left\{\frac{c}{d}\right\}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd} \quad ; \quad \frac{c}{d} = \frac{cb}{db}$$

Se ha multiplicado los dos términos de cada fracción por el denominador de la otra. Esta operación se denomina *reducir las fracciones a común denominador.*

3.ª *Todo número racional tiene un representante cuyos términos son primos entre sí y con denominador positivo.*

En efecto, basta dividir los dos términos de un representante cualquiera con denominador positivo por su m.c.d. Las fracciones cuyos términos son primos entre sí se llaman *irreducibles.* Las tomaremos como *representantes canónicos* de sus clases respectivas. Es importante operar siempre con los representantes canónicos, porque esto supone una simplificación de los cálculos. Por esto se llama *simplificar una fracción* ponerla en la forma irreducible.

Para simplificar una fracción se dividen los dos términos por su m. c. d.

112. Adición de números racionales.

La adición de los nuevos entes, o números racionales, podía definirse arbitrariamente, pero con el fin de que la Aritmética no sea contradictoria, ha de cuidarse para que dicha definición verifique el principio de permanencia de las leyes formales.

En el caso de que $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ sean números enteros, por ser a múltiplo de b y c múltiplo de d, se tiene

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$$

en virtud de leyes de la división respecto a la adición entre enteros. Parece, pues, lógico que definamos en general para todas las clases de números racionales.

$$\left\{\frac{a}{b}\right\} + \left\{\frac{c}{d}\right\} = \left\{\frac{ad + bc}{bd}\right\}$$

Al resultado de la adición se llama *suma.*

113. Propiedades de la adición de números racionales.

I. *Uniforme:* la suma es independiente de los representantes elegidos en cada clase.

Sean, en efecto,

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Leftrightarrow ab' = a'b \quad ; \quad ab'dd' = a'bdd'$$

$$\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \Leftrightarrow cd' = c'd \quad ; \quad cd'bb' = c'dbb'$$

Sumando:

$$(ad + cb)\ b'd' = (a'd' + c'b')\ bd$$

lo que implica

$$\frac{ad + bc}{bd} = \frac{a'd' + b'c'}{b'd'}$$

Este resultado nos permite definir: *suma de dos números racionales* $\left\{\frac{a}{b}\right\}$ *y* $\left\{\frac{c}{d}\right\}$ *es el número racional correspondiente a la clase* $\left\{\frac{ad + bc}{bd}\right\}$

Y también nos permite definir la adición por medio de los representantes de igual denominador, así

$$\left\{\frac{a}{n}\right\} + \left\{\frac{b}{n}\right\} = \left\{\frac{an + bn}{n \cdot n}\right\} = \left\{\frac{a + b}{n}\right\}$$

II. *Conmutativa:*

$$\left\{\frac{a}{n}\right\} + \left\{\frac{b}{n}\right\} = \left\{\frac{a + b}{n}\right\} = \left\{\frac{b + a}{n}\right\} =$$

$$= \left\{\frac{b}{n}\right\} + \left\{\frac{a}{n}\right\}$$

III. *Asociativa:*

$$\left[\left\{\frac{a}{n}\right\} + \left\{\frac{b}{n}\right\}\right] + \left\{\frac{c}{n}\right\} = \left\{\frac{(a+b)+c}{n}\right\} =$$

$$= \left\{\frac{a+(b+c)}{n}\right\} = \left\{\frac{a}{n}\right\} + \left[\left\{\frac{b}{n}\right\} + \left\{\frac{c}{n}\right\}\right]$$

IV. *Elemento neutro:* Ya que

$$\left\{\frac{a}{n}\right\} + \left\{\frac{0}{n}\right\} = \left\{\frac{a+0}{n}\right\} = \left\{\frac{a}{n}\right\}$$

el *elemento neutro* de la adición es la clase $\left\{\frac{0}{n}\right\}$, o sea, el número racional cero.

V. *Elemento simétrico:* Todo número racional $\left\{\frac{a}{n}\right\}$ tiene otro simétrico, que es el $\left\{\frac{-a}{n}\right\}$.

$$\left\{\frac{a}{n}\right\} + \left\{\frac{-a}{n}\right\} = \left\{\frac{a+(-a)}{n}\right\} = \left\{\frac{0}{n}\right\}$$

Los números $\alpha = \left\{\frac{a}{n}\right\}$ y $\beta = \left\{\frac{-a}{n}\right\}$ se denominan *opuestos.* Al opuesto de un número α se representa por $-\alpha$, verificándose

$$\alpha + (-\alpha) = 0$$

Esta propiedad nos permite deducir, al igual que para los números enteros, que *la sustracción de dos números racionales es siempre posible;* y que *para restar dos números racionales se suma al minuendo el opuesto al sustraendo:*

$$\gamma = \alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

Estas cinco propiedades demuestran que *el conjunto* Q *de los números racionales es un grupo conmutativo respecto a la operación de adición,* o más sencillamente, *es un grupo aditivo.*

114. Multiplicación de números racionales.

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ representan números enteros, por ser a múltiplo de b, y c múltiplo de d, sabemos que *al multiplicar el divisor por un número el cociente queda dividido por dicho número,* y también que *para dividir el producto de dos enteros por un número entero, se*

divide uno cualquiera de los dos factores por dicho número, y por tanto,

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{\frac{a \cdot c}{b}}{d} = \frac{\frac{a}{b} \cdot c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$$

Parece, por tanto, lógico que definamos de un modo general para cualquier clase de números racionales.

$$\left\{\frac{a}{b}\right\} \cdot \left\{\frac{c}{d}\right\} = \left\{\frac{a \cdot c}{b \cdot d}\right\}$$

Al resultado de la multiplicación se llama *producto.*

115. Propiedades de la multiplicación de números racionales.

I'. *Uniforme:* El producto de dos números racionales es independiente de los representantes elegidos. En efecto, sean

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Leftrightarrow ab' = a'b$$

$$\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \Leftrightarrow cd' = c'd$$

multiplicando:

$$ac \cdot b'd' = a'c' \cdot bd \Leftrightarrow \frac{ac}{bd} = \frac{a'c'}{b'd'}$$

Esto nos permite definir: *dados dos números racionales* α *y* α', *su producto es el racional asociado al producto de una fracción cualquiera de* α *y de una fracción cualquiera de* α'.

II'. *Conmutativa:*

$$\left\{\frac{a}{b}\right\} \cdot \left\{\frac{c}{d}\right\} = \left\{\frac{a \cdot c}{b \cdot d}\right\} = \left\{\frac{c \cdot a}{d \cdot b}\right\} = \left\{\frac{c}{d}\right\} \cdot \left\{\frac{a}{b}\right\}$$

III'. *Asociativa:*

$$\left[\left\{\frac{a}{b}\right\} \cdot \left\{\frac{c}{d}\right\}\right] \cdot \left\{\frac{e}{f}\right\} = \left\{\frac{(a \cdot c) \cdot e}{(b \cdot d) \cdot f}\right\} = \left\{\frac{a \cdot (c \cdot e)}{b \cdot (d \cdot f)}\right\} =$$

$$= \left\{\frac{a}{b}\right\} \cdot \left[\left\{\frac{c}{d}\right\} \cdot \left\{\frac{e}{f}\right\}\right]$$

IV'. *Elemento neutro:* Ya que

$$\left\{\frac{a}{b}\right\} \cdot \left\{\frac{n}{n}\right\} = \left\{\frac{a \cdot n}{b \cdot n}\right\} = \left\{\frac{a}{b}\right\}$$

se deduce que la clase $\left\{\frac{n}{n}\right\}$ es el *elemento neutro* de la multiplicación, y se denomina elemento *unidad.*

V'. *Elemento simétrico:* Dado un número racional cualquiera $\left\{\frac{a}{b}\right\}$, distinto de cero, se verifica que

$$\left\{\frac{a}{b}\right\} \cdot \left\{\frac{b}{a}\right\} = \left\{\frac{a \cdot b}{b \cdot a}\right\} = \left\{\frac{1}{1}\right\} = 1$$

Luego, todo número racional, $\left\{\frac{a}{b}\right\}$, exceptuando el 0, tiene un elemento simétrico, $\left\{\frac{b}{a}\right\}$, denominado *inverso,* que se obtiene invirtiendo los dos elementos de la pareja de números enteros.

Dado un número racional $\alpha = \left\{\frac{a}{b}\right\}$, su inverso $\left\{\frac{b}{a}\right\}$ se representa por α^{-1}, verificándose

$$\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$$

De estas cinco propiedades deducimos que: *El conjunto* $Q^* = Q - \{0\}$ *es un grupo conmutativo respecto a la operación de multiplicación,* o sencillamente, *es un grupo multiplicativo.*

116. La división de números racionales.

La 5.ª propiedad, acabada de demostrar en el número anterior, y que no existía para multiplicación de enteros, nos va a permitir *simetrizar* la multiplicación, y hacer siempre posible la *división* de números racionales.

Dividir dos números racionales α y β, llamados *dividendo* y *divisor,* respectivamente, el segundo distinto de cero, es hallar otro número racional γ, llamado *cociente,* que multiplicado por el divisor β nos dé el dividendo α, o sea

$$\frac{\alpha}{\beta} = \gamma \Leftrightarrow \beta\gamma = \alpha \begin{cases} \alpha \in Q \\ \beta \in Q^* \end{cases}$$

Multipliquemos los dos miembros de la última igualdad por el inverso de β, o sea, por β^{-1}. Resulta

$$\beta \cdot \beta^{-1} \cdot \gamma = \alpha \cdot \beta^{-1}$$

Pero

$$\beta \cdot \beta^{-1} = 1 \quad \text{y} \quad 1 \cdot \gamma = \gamma$$

Luego

$$\gamma = \alpha \cdot \beta^{-1}$$

que nos dice:

1.° *La división de números racionales es siempre posible.*

2.° *Para dividir dos números racionales se multiplica el dividendo por el inverso del divisor.*

Por tanto, la división no existe como operación independiente en el conjunto Q de los números racionales: equivale a una multplicación. Y he aquí la paradoja: al tratar de dar solución al problema de la división mediante la introducción de los números racionales, lo que conseguimos es hacer desaparecer la división como operación independiente.

117. Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición.

$$\left[\left\{\frac{a}{n}\right\} + \left\{\frac{b}{n}\right\}\right] \cdot \left\{\frac{c}{d}\right\} = \left\{\frac{a+b}{n}\right\} \cdot \left\{\frac{c}{d}\right\} =$$

$$= \left\{\frac{(a+b)\,c}{n \cdot d}\right\} = \left\{\frac{ac+bc}{n \cdot d}\right\} = \left\{\frac{ac}{nd}\right\} + \left\{\frac{bc}{nd}\right\} =$$

$$= \left\{\frac{a}{n}\right\}\left\{\frac{c}{d}\right\} + \left\{\frac{b}{n}\right\}\left\{\frac{c}{d}\right\}$$

VI'. *La multiplicación de racionales es distributiva respecto a la adición.*

118. Concepto de cuerpo.

Todo conjunto C se dice que tiene la estructura de *cuerpo* cuando se pueden definir en él dos operaciones o leyes de composición interna distintas, y tales que: 1.°) respecto a la primera operación, el conjunto C forme un "grupo abeliano"; 2.°) respecto a la segunda operación, el conjunto $C^* = C - \{0\}$ constituya un "grupo"; 3.°) la

segunda operación sea distributiva respecto a la primera. En resumen: CUERPO *es un anillo cuyos elementos distintos del neutro de la adición constituyen un grupo multiplicativo.*

Todo cuerpo es un anillo, pero no a la inversa.

119. El cuerpo Q de los números racionales.

Por cumplir las propiedades I a V y I' a VI', demostradas en los números anteriores, *el conjunto* Q *de los números racionales es un cuerpo conmutativo,* ya que la segunda operación tiene además la propiedad conmutativa.

120. Isomorfismo del anillo Z con una parte del cuerpo Q.

Nada de lo dicho hasta aquí nos autoriza a suponer que el número racional $\left\{\frac{a}{1}\right\}$ sea el número entero a.

Lo que sí podemos es establecer una correspondencia biunívoca entre el conjunto Z y el conjunto Q' de los números racionales de la forma $\left\{\frac{a}{1}\right\}$. Hagamos que a todo número entero a le corresponda el racional $\left\{\frac{a}{1}\right\}$. Se verifica entonces

$$f(a) = \left\{\frac{a}{1}\right\}$$

$$f(b) = \left\{\frac{b}{1}\right\}$$

$$f(a+b) = \left\{\frac{a+b}{1}\right\} = \left\{\frac{a}{1}\right\} + \left\{\frac{b}{1}\right\} = f(a) + f(b)$$

$$f(a \cdot b) = \left\{\frac{a \cdot b}{1}\right\} = \left\{\frac{a}{1}\right\} \cdot \left\{\frac{b}{1}\right\} = f(a) \cdot f(b)$$

La correspondencia así definida es biunívoca y *conserva la suma y el producto.* Luego es un *isomorfismo.*

Aunque los números enteros y los racionales son de distinta naturaleza, el isomorfismo considerado nos autoriza a considerar ambos conjuntos como idénticos frente a las operaciones de adición y multiplicación, y a tomar unos por otros.

Se dice que se ha *sumergido* el conjunto Z en el conjunto Q mediante la identificación $a = \left\{\frac{a}{1}\right\}$. Así, pues

El anillo Z es una parte del cuerpo Q de los racionales.

121. Números racionales positivos y negativos.

Hemos visto en el número 111 que *todo número racional tiene representantes con denominador positivo.*

Si entonces el numerador también es positivo, el número racional se llama *positivo.* Si siendo positivo el denominador, el numerador es negativo, el número racional se llama *negativo.*

Se llama *valor absoluto* de un número racional a su propio valor, si es positivo o nulo; y a su opuesto, si es negativo.

122. Ordenación de los números racionales.

La igualdad

$$\alpha + x = \beta \quad ; \quad \alpha, x, \beta \in Q \quad ; \quad x \geqslant 0$$

establece en Q una relación de orden que expresamos en la forma

$$\alpha \leqslant \beta$$

Efectivamente, esta relación tiene las propiedades siguientes:

I. *Reflexiva:*

$$\alpha + 0 = \alpha \Leftrightarrow \alpha \leqslant \alpha$$

II. *Transitiva:* Si

$$\alpha \leqslant \beta \Leftrightarrow \alpha + x = \beta$$
$$\beta \leqslant \gamma \Leftrightarrow \beta + y = \gamma$$

Sumando:

$$\alpha + \beta + x + y = \beta + \gamma \quad ; \quad \alpha + (x + y) = \gamma$$

Luego

$$\alpha \leqslant \gamma$$

III. *Antisimétrica:*

$$\alpha \leqslant \beta \Leftrightarrow \alpha + x = \beta$$
$$\beta \leqslant \alpha \Leftrightarrow \beta + y = \alpha$$

Sumando:

$$\alpha + \beta + x + y = \alpha + \beta \quad ; \quad x + y = 0$$
$$x = y = 0 \quad ; \quad \alpha = \beta$$

La ordenación es *total*, pues relaciona dos números cualesquiera. Todo elemento carece de siguiente y no existe ninguno que preceda a los demás.

Entre cada dos números racionales existe siempre otro, y, por tanto, infinitos. En efecto, sea, por ejemplo,

$$\alpha = \left\{\frac{a}{b}\right\} < \beta = \left\{\frac{c}{d}\right\}$$

Tomando todos los denominadores positivos, será

$$\alpha b = \alpha b < \beta b$$
$$\alpha d < \beta d = \beta d$$

Como $\alpha b = a$, $\beta d = c$, sumando resulta

$$\alpha(b + d) < a + c < \beta(b + d)$$

o sea

$$\alpha < \left\{\frac{a+c}{b+d}\right\} < \beta$$

123. **Consecuencias.**

1.ª Todo número positivo es mayor que todo número negativo.
2.ª Todo número positivo es mayor que cero.
3.ª Todo número negativo es menor que cero.
4.ª De dos números positivos es mayor el de mayor valor absoluto.
5.ª De dos números negativos es mayor el de menor valor absoluto.

124. **Representación geométrica de los números racionales.**

Sobre una recta tomemos un punto *O* como origen que represente el número {0}. Elijamos un segmento como unidad de longitudes, y llevémoslo sucesivamente tanto a derecha como a izquierda. Los

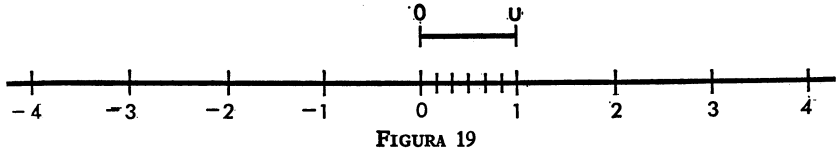


FIGURA 19

puntos de división representan los números enteros, los positivos a derecha y los negativos a izquierda (fig. 19).

Para representar las fracciones de denominador *n*, dividimos cada uno de los segmentos de longitud unidad en *n* partes iguales, y los puntos de división representan dichas fracciones. Variando *n* obtenemos todos los números racionales. Dados dos de éstos, siempre el

mayor está a derecha del menor. La propiedad más notable de este conjunto de puntos es que es *denso* en toda la recta. Esto quiere decir que hay siempre infinitos puntos racionales interiores a todo intervalo, por pequeño que sea. En efecto, se ha demostrado en el número anterior que entre dos números racionales hay siempre otro, entre éste y cualquiera de los dos primeros otro, y así sucesivamente. No hay, pues, ningún intervalo de la recta, por pequeño que sea, vacío de puntos racionales.

A pesar de esto, los puntos racionales *no llenan* la recta. Hay otros muchos más puntos irracionales. Pero éstos se pueden representar con cuanta aproximación se desee por números racionales. Por eso, éstos son suficientes en las aplicaciones prácticas.

125. Representación gráfica de las clases de equivalencia.

Representemos el conjunto Z de los números enteros en cada uno de dos ejes perpendiculares, con origen común O. El conjunto producto $Z \times Z$ vendrá dado por los nudos del retículo de la figura 19 b. Dichos nudos, excluidos los situados sobre el eje $X'X$, representan el conjunto de las fracciones.

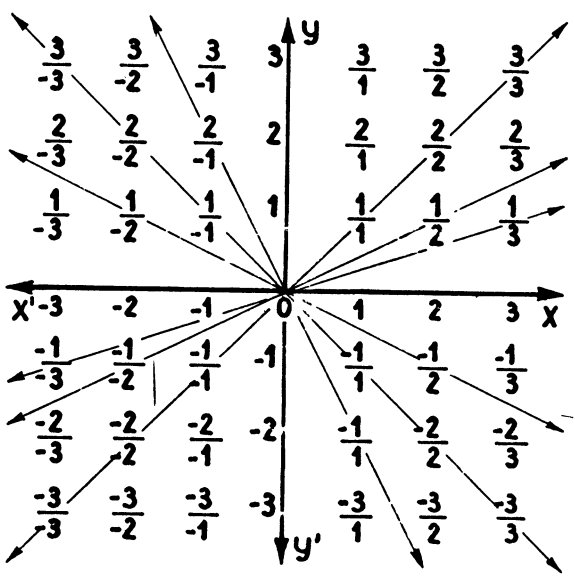


FIGURA 19 b

Las clases de equivalencia vienen dadas por las rectas que contienen los nudos alineados con el origen de coordenadas. Las frac-

ciones irreducibles, o elementos canónicos, están representadas por los nudos de dichas rectas más próximos al origen de coordenadas.

EJERCICIOS

1. **Calcula las diferencias:**

$$\left(-\frac{8}{25}\right) - \left(+\frac{3}{4}\right) ; \left(-\frac{7}{5}\right) - \left(-\frac{8}{15}\right);$$

$$\frac{15}{8} - \left(-\frac{8}{3}\right); \frac{3}{5} - \left(-\frac{7}{15}\right)$$

2. **Efectúa las operaciones siguientes:**

$$\left[\frac{3}{5} - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{8}\right)\right] + \left[3 - \left(\frac{4}{9} + \frac{3}{10}\right)\right] -$$

$$- \left[\frac{7}{5} - \frac{15}{8}\right]$$

3. **El termómetro marca 36° C. después de haber subido 8° C., bajado 15° C., subido 5° C. y bajado 22° C. ¿Cuál era la temperatura inicial? ¿Y cuál el fundamento teórico de la operación efectuada?**

4. **Demostrar que si α y β son dos números racionales cualesquiera, se verifica que**

$$\alpha^2 + \beta^2 > 2\alpha\beta$$

5. **Demostrar que si α, β, γ son números racionales cualesquiera, no todos iguales, se verifica que**

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

6. **Partiendo de la identidad $(m - n)^2 = m^2 + n^2 - 2mn$, demostrar que la suma de dos números inversos es siempre mayor que 2. Determinar estos números en el supuesto de que su suma valga $2 + \frac{9}{70}$.**

7. **¿Cuántas fracciones hay que sean equivalentes a una dada y de términos menores que los suyos?**

8. **Establecer una regla para hallar la mayor fracción $\frac{1}{k}$, de numerador 1, que sea inferior a una fracción dada $\frac{m}{n} < 1$. Aplicar dicha regla para descomponer $\frac{113}{355}$ en suma de fracciones de numerador 1.**

9. Determinar una fracción irreducible $\frac{m}{n}$, cuyo numerador m es primo y cuyo denominador n es el producto de dos números primos, sabiendo que la suma $\frac{m^2}{n^2} + \frac{4}{9}$ es el cuadrado de una fracción.

10. Dadas varias fracciones irreducibles $\frac{4}{15}, \frac{64}{45}, \frac{12}{75}$ y $\frac{7}{25}$, hallar la menor fracción $\frac{m}{n}$ que dividida por cada una de las propuestas dé cocientes enteros.

11. ¿Cuál es el número de habitantes de tres poblaciones, que en total sobrepasan los 10.000 y no llegan a los 11.000, sabiendo que los de la primera población son el 35/143 del total, y los de la segunda el 23/165 del total?

12. Si α y β son las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, calcula en función de a, b y c las siguientes expresiones:

$$\alpha^2 + \beta^2 \quad ; \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \quad ; \quad \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$$

13. El conjunto $Z/5$ de las clases residuales módulo 5, ¿es un cuerpo conmutativo? Haz la tabla de multiplicar de dicho conjunto, y señala el inverso de cada elemento. ¿Sucede lo mismo para cualquier conjunto Z/m?

14. Sabiendo que se llama *fracción decimal* a toda fracción cuyo denominador es una potencia de 10, de exponente natural, determina una condición necesaria y suficiente para que una fracción irreducible sea equivalente a una fracción decimal.

15. Sabiendo que *número decimal* es todo número racional en cuya clase de equivalencia figure una fracción decimal, halla si el conjunto de los números decimales, dotado de las operaciones de sumar y multiplicar, forma un anillo conmutativo, un dominio de integridad o un cuerpo.

16. Comprueba que el conjunto de las clases residuales módulo 3 tiene la estructura de cuerpo, y, en cambio, el conjunto $Z/4$ de las clases residuales módulo 4 tiene sólo estructura de anillo conmutativo unitario con un divisor de cero.

17. Demuestra que son equivalentes las fracciones

$$\frac{1988}{5138}, \frac{568}{1468}$$

y halla el representante canónico del número racional que definen.

18. Intercala cinco números racionales entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{7}{8}$.

10

DETERMINANTES

126. Inversiones en las permutaciones.

Si fijamos un cierto orden de sucesión entre M elementos dados, que supondremos es el alfabético, si son letras distintas, o el de la serie natural, si son números o tienen índices numéricos, se llama *permutación principal* aquella en que los elementos se siguen en el orden establecido.

En otra permutación cualquiera, dos elementos, consecutivos o no, presentan una *sucesión* cuando en ella se siguen en el mismo orden establecido, y presentan una *inversión* si en ella se siguen en orden contrario al establecido.

Así, si los elementos se indican con a_1, a_2, a_3, a_4, y si admitimos $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$ como permutación principal, cada uno de sus elementos forma sucesión con cada uno de los siguientes. Pero en la permutación $a_3\ a_1\ a_4\ a_2$ el elemento a_3 forma inversión con a_1 y a_2, y el a_4 con a_2; por tanto, esta permutación presenta tres inversiones. Para hallar todas las inversiones de una permutación se suman las que forman cada elemento con todos los que le siguen.

Una permutación se llama de *clase par* o de *clase impar*, o más brevemente, *par* o *impar*, según que contenga un número par o impar de inversiones. La $a_3\ a_1\ a_4\ a_2$ es impar, por tener tres inversiones.

127. Cambio de dos elementos en una permutación.

Si en una permutación cambian entre sí de lugar dos elementos, la permutación cambia de clase.

Primer caso. Supongamos que dichos elementos a_i y a_j son consecutivos en la permutación dada.

Representamos por A el conjunto de todos los elementos anteriores a ambos, y por B a todos los posteriores a ambos. La permutación dada se escribirá:

$$A\ a_i\ a_j\ B$$

y después de cambiar entre sí de lugar, se tendrá:

$$A\ a_j\ a_i\ B$$

Por una parte se conservarán todas las inversiones que formaban entre sí los objetos que componen A y las de éstos con los siguientes, y, por otra parte, las que formaban los de B entre sí y con los que les preceden. Lo único que se ha modificado es el número de inversiones del par $a_i\ a_j$; si antes formaban una inversión, ahora no, y recíprocamente, o sea, el número total de inversiones de la permutación disminuye o aumenta en una unidad, y, por tanto, cambia de clase.

Segundo caso. Si a_i y a_j no son consecutivos, sino que entre ellos hay h elementos, cuyo conjunto representamos por M, la permutación dada se escribirá:

$$A\ a_i\ M\ a_j\ B$$

Haciendo avanzar h lugares a a_i, es decir, intercambiándose sucesivamente con los h elementos de M, se tiene:

$$A\ M\ a_i\ a_j\ B$$

y haciendo ahora retroceder $h + 1$ lugares a a_j, tendremos:

$$A\ a_j\ M\ a_i\ B$$

El número total de cambios de clase de la permutación por cambio de dos elementos no consecutivos será $h + h + 1 = 2h + 1$, esto es, un número impar; luego ambas permutaciones son de distinta clase, como queríamos demostrar.

128. Número de permutaciones pares e impares.

Entre las m! *permutaciones de* m *elementos, hay* $\frac{m!}{2}$ *pares y* $\frac{m!}{2}$ *impares.*

En efecto, supuestas formadas las $m!$ permutaciones de estos m elementos, pueden asociarse de dos en dos (su número es par, ya que en $m!$ entra el 2 como factor), reuniendo en cada grupo las que sólo difieran en la posición de dos elementos cualesquiera (por ejemplo, los dos primeros), y como las permutaciones de cada grupo son de distinta clase (núm. 127), habrá tantas pares como impares, y además tantas de cada clase como grupos hayamos formado, es decir, $\frac{m!}{2}$.

Así, agrupando de este modo las permutaciones de 3 elementos, resulta:

123	132	231
213	312	321

Las dos de cada grupo difieren sólo en los dos primeros elementos. Luego una es par y la otra impar.

129. Matrices y determinantes: Definiciones y notaciones.

Matriz es un cuadro de m n números, dispuestos en m *columnas* (verticales) y n *filas* (horizontales).

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{matrix} \qquad [1]$$

Si $m \neq n$, la matriz se llama *rectangular;* si $m = n$, se llama *cuadrada.* En adelante nos referiremos exclusivamente a las matrices cuadradas.

Elementos de la matriz son los m n números que la forman; los dos índices i, j, de un elemento a_{ij} denotan, respectivamente, el orden de la horizontal y vertical de la matriz que se cruzan en dicho elemento.

Diagonal principal de una matriz cuadrada es la formada por los elementos cuyos dos índices son iguales, es decir, a_{11} a_{22} a_{33} ... a_{nn}, y va de la parte izquierda superior a la parte derecha inferior.

Diagonal secundaria es la formada por los elementos a_{1n}, a_{2n-1}, ..., a_{n1}, en cada uno de los cuales la suma de los índices vale $n + 1$ y va de la parte superior derecha a la parte inferior izquierda.

Elementos conjugados son dos elementos, a_{ij} y a_{ji}, afectados de los mismos índices cambiados de lugar. Son simétricos respecto de la diagonal principal. Por ejemplo, en la matriz [1] son conjugados los elementos a_{12} y a_{21}, a_{13} y a_{31}, a_{23} y a_{32}, etcétera.

DETERMINANTE *de una matriz cuadrada es el polinomio que resulta de la suma algebraica de todos sus términos.*

TÉRMINOS *de un determinante es el producto de* n *elementos de la matriz, tomados de modo que entre uno solo de cada fila y uno solo de cada columna, precedido del signo* + *o* —, *según que las permutaciones de los índices que indican filas o columnas sean de la misma o de distinta clase.*

Un determinante se representa escribiendo la matriz correspondiente entre dos barras.

En el determinante de cuarto orden:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

el término $a_{21}\ a_{42}\ a_{13}\ a_{34}$ es negativo, pues la permutación de los indicadores de fila 2 4 1 3 es impar, y la de los indicadores de columna 1 2 3 4 es par. Pero el término $a_{11}\ a_{42}\ a_{23}\ a_{34}$ es positivo, porque ambas permutaciones son pares.

130. Teorema sobre el signo de cada término de un determinante.

El signo que corresponde a cada término del determinante de una matriz no depende del orden de sus factores.

En efecto, si permutamos dos factores cualesquiera en un término, cambian de clase las permutaciones de los indicadores de filas y de columnas (núm. 126); luego si antes eran de la misma clase seguirán siéndolo después de cambiar entre sí de lugar, y si eran de distinta clase, igual sucederá después.

CONSECUENCIAS.—1.ª Podemos ordenar los elementos de cada término de modo que los indicadores de filas se sucedan en el orden *natural*. Entonces la permutación de los indicadores de filas será de clase par en todos los términos, y, por tanto, para tener el signo de éstos bastará conocer la clase de la permutación de los indicadores de columna, que si es par será +, y si es impar será —.

Así el término $a_{33}\ a_{51}\ a_{45}\ a_{24}\ a_{12}$ podemos escribirlo $a_{12}\ a_{24}\ a_{33}\ a_{45}\ a_{51}$ que llevará el signo — por ser de clase impar la permutación 2 4 3 5 1 de los indicadores de columna.

2.ª *El número de términos de un determinante de orden* n *es* n!, *siendo la mitad positivos y la otra mitad negativos.*

En efecto, si ordenamos los elementos de los términos del determinante según los indicadores de filas, obtendremos todos los términos posibles tomando para los indicadores de columna todas la *n!* permutaciones de sus índices. Pero de éstas, la mitad son pares y la otra mitad impares. Luego queda demostrado el enunciado.

De aquí también que adoptemos para un determinante de orden *n* la siguiente representación:

$$\Delta = \Sigma\ [\pm\ (a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ a_{44}\ \ldots\ a_{nn})]$$

El sumatorio Σ representa en este caso los términos que se obtienen de la diagonal principal permutando los indicadores de columnas de todos los modos posibles y poniendo a cada uno el signo + o —, según que la permutación correspondiente sea de la misma o de distinta clase que la principal.

3.ª En lugar de ordenar los elementos de cada término, según los indicadores de fila, podemos ordenarlos según los indicadores de columna y hacer las permutaciones con los indicadores de filas, con lo cual no varía ni el número de términos, ni el valor, ni el signo de cada uno.

131. Determinante de segundo orden.

Sea el determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Aplicando las definiciones anteriores, vemos que consta únicamente de dos términos $a_{11}\ a_{22}$ y $a_{12}\ a_{21}$, el primero de signo +, y el segundo de signo —. Luego:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\ a_{22} - a_{12}\ a_{21}$$

El primer término del desarrollo está formado por los elementos de la diagonal principal, y el segundo término por los elementos de la diagonal secundaria.

132. Determinante de tercer orden.

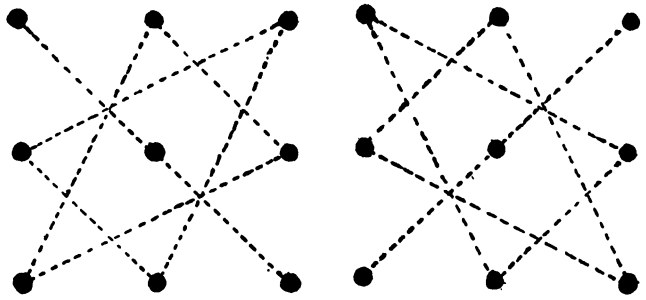
Sea el determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Obtendremos todos los términos, según la consecuencia 1.ª del número 130, dejando fijos los indicadores de filas y permutando los de columnas de todos los modos posibles. Como 3! = 6, saldrán los seis términos siguientes:

+	$a_{11}\ a_{22}\ a_{33}$	por ser	123	permutación	par
+	$a_{12}\ a_{23}\ a_{31}$	"	"	231	"	"
+	$a_{13}\ a_{21}\ a_{32}$	"	"	312	"	"
—	$a_{13}\ a_{22}\ a_{31}$	"	"	321	"	impar
—	$a_{12}\ a_{21}\ a_{33}$	"	"	213	"	"
—	$a_{11}\ a_{23}\ a_{32}$	"	"	132	"	"

Este resultado se resume en la *Regla de Sarrus*, que está expresada en los siguientes esquemas; el primero da tres términos positivos y el segundo tres negativos:



signo + signo —

EJEMPLO.—*Hallar el valor del siguiente determinante:*

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & 0 & 7 \\ -3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 0\cdot 2 + 7\cdot 4\cdot(-3) + (-6)\cdot 1\cdot 5 - (-6)\cdot 0\cdot(-3) - \\ - 7\cdot 5\cdot 2 - 4\cdot 1\cdot 2 = 0 - 84 - 30 - 0 - 70 - 8 = -192.$$

EJERCICIOS

Hallar el valor de cada uno de los siguientes determinantes:

1. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} a & -a & -a \\ b & b & -b \\ c & -c & c \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & -2 \\ -4 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -5 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \\ 3 & -6 & 3 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -2 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & -3 & \frac{4}{3} \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & -2 \\ \frac{2}{3} & -3 & 4 \\ 3 & 5 & \frac{-1}{5} \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} -1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & -1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & -1 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 7 & 15 \\ 21 & 8 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{5} \\ 6 & \frac{2}{7} \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 0'5 & 2'7 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{5} & \frac{7}{5} \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 8'3 & 10'5 \\ 5'6 & 3 \end{vmatrix}$

Por desarrollo del determinante, hallar el valor de x en cada una de las siguientes ecuaciones:

16. $\begin{vmatrix} x-4 & x \\ 2 & 3-5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

17. $\begin{vmatrix} x+2 & -2 & 1 \\ x+1 & 0 & 1 \\ x & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

18. $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ x & 5 & -3 \\ 3 & 3 & x \end{vmatrix} = 5.$

11

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

133. Producto por un número.

Si todos los elementos de una fila o columna se multiplican por un mismo número k, *el determinante queda multiplicado por* k.

Porque todo término del determinante tendrá un factor multiplicado por k, que se saca factor común.

Esto se expresa simbólicamente:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & ka_{nn} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ 10 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \cdot 2 & 5 & 3 \\ 2 \cdot 3 & 2 & 4 \\ 2 \cdot 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

Según se ve en el ejemplo, esta propiedad permite sacar fuera del determinante los factores comunes de todos los elementos de una fila o columna.

134. Cambio de dos líneas paralelas entre sí.

Si se cambian entre sí dos líneas paralelas (dos filas o dos columnas), el determinante cambia de signo, pero no de valor absoluto.

Permutemos, por ejemplo, la segunda con la tercera fila y demostraremos que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

o sea:

$$\Delta = -\Delta'$$

En efecto, en Δ la diagonal principal es $a_{11}\ a_{22}\ a_{33} \dots a_{nn}$, y los restantes términos se obtienen permutando los indicadores de filas de todos los modos posibles y poniendo signo + a las que sean de igual clase que la permutación principal, o sea a las pares, y signo — a las impares. Del mismo modo en Δ' la diagonal principal es $a_{11}\ a_{32}\ a_{23} \dots$ $\dots\ a_{nn}$, y los restantes términos se obtendrán permutando los indicadores de filas de todos los modos posibles y poniendo signo + a las que sean de igual clase que la principal, 132 ... n, o sea a las impares, y signo — a las de distinta clase, o sea a las pares.

Luego, como siguen existiendo los mismos términos, aunque con signo contrario, el valor absoluto del determinante no varía. Por tanto, $\Delta = -\Delta'$.

Si las filas permutadas no son consecutivas, podemos aplicar la segunda parte del número 127, y obtendremos la misma conclusión anterior.

135. Determinantes nulos.

1.° *Si en un determinante son nulos los elementos que forman una fila o columna, el determinante es nulo.*

Porque según la definición de determinante, cada uno de sus términos tendría un factor nulo, y por tanto cada término sería nulo.

2.° *Si una matriz tiene dos filas o dos columnas iguales, el determinante es nulo.*

Pues cambiándolas entre sí, el determinante queda el mismo; pero, por otro lado, debe cambiar de signo. Luego sería $\Delta = -\Delta$, o sea, $2\Delta = 0$, y $\Delta = 0$.

3.° *Si los elementos correspondientes de dos filas o dos columnas son proporcionales, el determinante es nulo.*

En efecto, si es λ el factor de proporcionalidad, sacándole factor común, quedará otra matriz con dos líneas paralelas idénticas, cuyo determinante es nulo. Así, si en el determinante de tercer orden se verifica que:

$$\frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{21}} = \frac{a_{32}}{a_{31}} = \lambda$$

se tendrá:

$$a_{12} = \lambda a_{11}; \qquad a_{22} = \lambda a_{21}; \qquad a_{32} = \lambda a_{31}$$

y

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & \lambda a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \lambda = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \cdot 0 = 0$$

136. Menor complementario y adjunto de un elemento.

En una matriz de orden n *se denomina menor complementario del elemento* a_{ik}, *al determinante de la matriz de orden* n — 1, *que resulta de suprimir la fila* i *y la columna* k *a que pertenece aquél. Lo designaremos por* α_{ik}.

EJEMPLO.—*El menor complementario del elemento* a_{32} *en el determinante de cuarto orden:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad \text{es} \quad \alpha_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

En una matriz se llama *complemento algebraico* o *adjunto* del elemento a_{ik} a su menor complementario multiplicado por $(-1)^{i+k}$. Lo designaremos por A_{ik}.

EJEMPLO.—*El adjunto del elemento 3 en el determinante:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix} \text{ es } A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Al adjunto del elemento siguiente, 4, le corresponderá signo +, y al del 7, signo —.

137. Significado del adjunto de a_{11}.

Si en el desarrollo de un determinante sacamos factor común a_{11} en todos los términos en que figura, *aparece multiplicado por un polinomio que,* vamos a demostrar, *es precisamente su adjunto* A_{11}.

En efecto, cualquier término en que figure a_{11} es de la forma

$$(-1)^m a_{11} a_{2s_2} a_{3s_3} \dots a_{ns_n}$$

siendo m el número de inversiones de la permutación $1\ s_2\ s_3\ s_4 \dots s_n$. Una vez separado el factor a_{11}, el producto restante

$$(-1)^m a_{2s_2} a_{3s_3} \dots a_{ns_n}$$

contiene un factor de cada fila, excepto de la primera, y uno de cada columna, excepto de la primera; luego es un término del determinante α_{11}, menor complementario de a_{11}.

También su signo es el que le corresponde en este determinante, pues la permutación $s_2\ s_3\ \ldots\ s_n$ tiene el mismo número de inversiones que la $1\ s_2\ s_3\ \ldots\ s_n$, ya que el 1 no forma inversión ninguna. Recíprocamente, cualquier término del determinante α_{11} multiplicado por a_{11} da un término del determinante total Δ. Por tanto, queda demostrado el teorema, ya que $A_{11} = +\ \alpha_{11}$.

138. Significado del adjunto de un elemento cualquiera a_{jk}.

Si sacamos factor común el elemento a_{jk} en todos los términos en que se encuentra, en el desarrollo de un determinante Δ veremos igualmente que *aparece multiplicado por un polinomio que coincide con su adjunto* A_{jk}.

En efecto, el término a_{jk} podemos llevarlo al primer lugar de la primera fila, sin que varíe la posición relativa de los elementos del α_{jk}. Para ello, del determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jk} & \ldots & a_{jn} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

pasamos al

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jk} & \ldots & a_{jn} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

trasponiendo la fila de lugar j con cada una de las $j - 1$ anteriores. En seguida del Δ' pasamos al

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} a_{jk} & a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jn} \\ a_{1k} & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{2k} & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{nk} & a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

permutando la columna de lugar k con las $k - 1$ precedentes.

En el desarrollo del nuevo determinante Δ'', el conjunto de los términos que contienen el término a_{jk} forman el producto $a_{jk}\,\alpha_{jk}$, siendo α_{jk} su menor complementario, que no ha sufrido variación. Es decir, $\Delta'' = a_{jk}\,\alpha_{jk} + \ldots$ Pero como Δ se deduce de Δ'' mediante $j - 1 + k - 1 = j + k - 2$ cambios de filas o columnas, que producen $j + k - 2$ cambios de signo, será:

$$\Delta = (-1)^{j+k}\,\Delta'' = (-1)^{j+k}\,a_{jk}\,\alpha_{jk} + \ldots$$

Luego el polinomio por el que aparece multiplicado el elemento a_{jk}, al sacarlo factor común en el desarrollo de Δ, es

$$(-1)^{j+k}\,\alpha_{jk} = A_{jk}$$

139. Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea.

Elijamos, por ejemplo, la fila de lugar j. En cada término de Δ hay un elemento de esta fila, y sólo uno. Luego se pueden clasificar los $n!$ términos del siguiente modo: todos los que contienen el elemento a_{j1} forman el producto $a_{j1}\,A_{j1}$; los que contienen a_{j2} forman $a_{j2}\,A_{j2}$, etc. Luego

$$\Delta = a_{j1}\,A_{j1} + a_{j2}\,A_{j2} + \ldots + a_{jn}\,A_{jn}$$

El valor de un determinante es igual a la suma de los elementos de una línea cualquiera multiplicados por sus adjuntos correspondientes.

EJEMPLO.—*Desarrollar por los elementos de la cuarta columna el determinante siguiente:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ 5 & 0 & 2 & 9 \\ 6 & 3 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 5 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} - 9 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot 73 + 3 \cdot 45 - 9 \cdot 91 + 8 \cdot 58 = -146 + 135 - 819 + 464 = -366.$$

140. Corolario.

La suma de los productos de los elementos de una línea por los adjuntos de una paralela a ella es igual a cero.

Sea el determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Si formamos la suma de los productos de los elementos de la primera columna por los adjuntos A_{13}, A_{23}, A_{33}, de los elementos de la tercera, se tiene:

$$a_{11}\,A_{13} + a_{21}\,A_{23} + a_{31}\,A_{33} =$$

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

En virtud del teorema que acabamos de demostrar, esta suma es el desarrollo del determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}$$

por los elementos de la tercera columna. Pero este determinante, por tener dos columnas iguales, es nulo. Luego queda demostrado el Corolario.

141. Descomposición de un determinante en suma de otros.

Si un determinante tiene una línea cuyos elementos son sumas de s *términos, se puede descomponer en suma de* s *determinantes, que tienen las demás líneas iguales a las del dado, y en lugar de aquélla, la formada por los primeros sumandos, por los segundos..., respectivamente.* Así, por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 5 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+1+0 & 4 & -3 \\ 3+4-2 & 6 & 5 \\ 5-2-3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & 5 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 4 & 6 & 5 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

En efecto, el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42}+b_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

desarrollado por los elementos de la segunda columna vale

$$\Delta = (a_{12} + b_{12})\, A_{12} + (a_{22} + b_{22})\, A_{22} + (a_{32} + b_{32})\, A_{32} + \\ + (a_{42} + b_{42})\, A_{42} = (a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} + a_{42}A_{42}) + \\ + (b_{12}A_{12} + b_{22}A_{22} + b_{32}A_{32} + b_{42}A_{42})$$

Y cada uno de estos dos paréntesis es el desarrollo del determinante obtenido sustituyendo los elementos de la segunda columna por sus primeros sumandos o por los segundos, esto es

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & b_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

142. Teorema.

El valor de un determinante no se altera si a los elementos de una línea se les suman los de una paralela multiplicados por un mismo factor. Así se verifica la igualdad

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + pa_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + pa_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + pa_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

En efecto, con esta operación el nuevo determinante se descompone en suma de dos determinantes, uno igual al primitivo, y el otro nulo por tener dos líneas paralelas con sus elementos proporcionales.

143. Corolario.

Si un determinante tiene una línea que es suma de otras paralelas multiplicadas por un factor cualquiera, el determinante es nulo. Así, es nulo el siguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \cdot 5 + 4 \cdot 3 \\ 2 & 5 & 2 \cdot 5 + 5 \cdot 3 \\ 3 & 6 & 3 \cdot 5 + 6 \cdot 3 \end{vmatrix}$$

Porque puede descomponerse en suma de varios determinantes con dos líneas paralelas iguales o proporcionales, y, por lo tanto, nulos.

144. Método práctico para calcular un determinante.

El determinante en que los elementos de una fila o de una columna son nulos, salvo uno, es igual al producto de este elemento por su

adjunto. Según esto, se reducirá el cálculo del determinante al de otro de orden inferior en una unidad, si combinando entre ellas, por adiciones convenientes, dos o varias filas o columnas, se llega a anular todos los elementos de una de ellas, excepto uno. Se operará sobre el nuevo determinante como sobre el primero, y así sucesivamente hasta que se llegue a un determinante de segundo orden, cuyo valor se escribirá inmediatamente.

Sea, por ejemplo, el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Restando de la segunda, tercera y cuarta columna la primera multiplicada, respectivamente, por 2, 2, 1, resulta:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 5 \\ 8 & -7 & -13 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ -7 & -13 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 7 & 13 & 6 \end{vmatrix}$$

Si en el último determinante se resta de la segunda y de la tercera columna la primera multiplicada por 3, se obtiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 7 & -8 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -8 & -15 \end{vmatrix} = 10$$

EJERCICIOS

1. En el desarrollo del determinante de cuarto orden del número 136, dígase con qué signo figurarán los siguientes términos:

$a_{12}\, a_{21}\, a_{34}\, a_{43}$; $a_{11}\, a_{23}\, a_{34}\, a_{42}$; $a_{14}\, a_{22}\, a_{31}\, a_{43}$; $a_{13}\, a_{21}\, a_{34}\, a_{42}$

2. Calcular los siguientes determinantes reduciéndoles a orden inferior por medio de menores.

$$a) \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \qquad b) \begin{vmatrix} a & a^2 & -1 & 2 \\ b & b^2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

c) $\begin{vmatrix} 0 & -x & -y & -z \\ -x & 1 & 2 & 3 \\ -y & 2 & 1 & 4 \\ -z & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 0 & b & c & d \\ b & 0 & e & f \\ c & e & 0 & g \\ d & f & g & 0 \end{vmatrix}$

3. Desarrollar y calcular, por los elementos de la columna más conveniente, los determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 14 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 7 & 9 & 8 \\ 17 & 5 & 6 & 4 \\ 3 & 11 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -c \\ a & 0 & -f & -e \\ b & f & 0 & -d \\ 0 & e & d & 0 \end{vmatrix}$

4. Demostrar la identidad

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

5. Desarrollar el determinante

$$\begin{vmatrix} x-1 & x^2-1 & x^3-1 \\ 2x-4 & x^2-4 & x^3-8 \\ 3x-9 & x^2-9 & x^3-27 \end{vmatrix}$$

llegando a una expresión formada por factores de primer grado.

6. Hallar el valor del determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ a & 0 & 0 & -d & 0 \\ 0 & b & -c & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

7. Hallar el valor del determinante de orden n

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

8. Los números 1573, 3263, 5369 y 2613 son divisibles por 13. Demostrar que también lo es el determinante.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 3 \\ 3 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 3 & 6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

9. Expresar en forma sencilla el valor del determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

10. Calcular el valor del determinante de orden n

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix}$$

11. Calcular el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 1/1! & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2! & 1/1! & 1 & 0 & 0 \\ 1/3! & 1/2! & 1/1! & 1 & 0 \\ 1/4! & 1/3! & 1/2! & 1/1! & 1 \\ 1/5! & 1/4! & 1/3! & 1/2! & 1/1! \end{vmatrix}$$

12. Demostrar que

$$\begin{vmatrix} a & x & x & b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix} = (a - b)^2 [(a + b)^2 - 4x^2]$$

13. Calcular el valor del determinante de orden n

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots \\ a_1 & a_1 + a_2 & a_1 + a_2 + a_3 & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 & \dots \\ a_1 & 2a_1 + a_2 & 3a_1 + 2a_2 + a_3 & 4a_1 + 3a_2 + 2a_3 + a_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

siendo el término **h** de una fila igual a la suma de los **h** términos de la fila anterior.

14. Calcular el valor del determinante, de orden n,

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 3 & \dots & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

en el cual todos los elementos de la diagonal principal y de la primera línea horizontal son 1; todos los situados debajo de la diagonal principal son iguales a — 1, y los demás, iguales a 3.

15. Hallar el valor del determinante, de orden n,

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2^2 & 2^2 & 2^2 & \dots & 2^2 & 2^2 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 3^2 & \dots & 3^2 & 3^2 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & \dots & 4^2 & 4^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & \dots & (n-1)^2 & (n-1)^2 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & \dots & (n-1)^2 & n^2 \end{vmatrix}$$

16. Hallar el valor del determinante, de orden n,

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

17. Calcular el valor del determinante, de orden p,

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p-1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p & p \end{vmatrix}$$

18. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a)\ \begin{vmatrix} 15+2x & 11 & x \\ 11+3x & 17 & -2x \\ 7+x & 14 & -3x \end{vmatrix} = 0 \qquad b)\ \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -x & 3 & -1 \\ x^2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$c)\ \begin{vmatrix} a-x & x & 1 \\ a+x & -\frac{x}{2} & -3 \\ x & \frac{x}{3} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

12

EQUIVALENCIA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES: REGLA DE CRAMER

145. Sistemas de ecuaciones: Definiciones.

Dos o más ecuaciones *forman un sistema* o *son simultáneas* cuando tienen las mismas soluciones.

Sistemas equivalentes son los que tienen las mismas soluciones. *Solución* de un sistema es el conjunto de valores de las incógnitas, que sustituidos en vez de ellas en todas las ecuaciones, las transforman en identidades.

Se dice que una ecuación es *consecuencia* de las ecuaciones de un sistema cuando toda solución del sistema satisface a la ecuación.

Resolver un sistema de ecuaciones es hallar las soluciones del mismo.

Los sistemas se clasifican en *determinados, indeterminados* y *absurdos* o *incompatibles,* según que tengan un número de soluciones limitado, ilimitado o no tengan ninguna solución.

Se llama *combinación lineal* de dos o más ecuaciones de un sistema a la ecuación que resulta de multiplicar cada una de éstas por un número o una constante distintos de cero, y de sumarlas después algebraicamente. Así, si representamos las ecuaciones abreviadamente por:

$$A_1 = B_1, \qquad A_2 = B_2, \qquad A_3 = B_3$$

una combinación lineal de las mismas es:

$$m_1A_1 + m_2A_2 + m_3A_3 = m_1B_1 + m_2B_2 + m_3B_3$$

en la que las letras mayúsculas representan polinomios en x, y, z, y las minúsculas, números distintos de cero.

146. Teorema fundamental de equivalencia en los sistemas de ecuaciones.

Si en un sistema de ecuaciones se sustituye una de ellas por una combinación lineal de la misma con varias o todas, el sistema es equivalente al propuesto.

En efecto, sean los sistemas dado y transformado:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = B_1 \\ A_2 = B_2 \\ \quad\cdots\cdots\cdots \\ A_n = B_n \end{array}\right\} \qquad [1]$$

$$\left.\begin{array}{l} m_1A_1 + m_2A_2 + \ldots + m_hA_h = \\ = m_1B_1 + m_2B_2 + \ldots + m_hB_h \\ A_2 = B_2 \\ \quad\cdots\cdots\cdots \\ A_n = B_n \end{array}\right\} \qquad [2]$$

La primera ecuación del sistema [2] es consecuencia de las h primeras del sistema [1], ya que toda solución de éste hará idénticos, respectivamente, A_1 y B_1, A_2 y B_2, ..., A_h y B_h, así como sus productos por los factores m_1, m_2, ..., m_h, siendo, por tanto, idénticas las sumas respectivas; es decir, se verificará la primera ecuación de [2], y como las n — 1 restantes son comunes, la solución del sistema [1] lo será del sistema [2].

Recíprocamente, toda solución del sistema [2] nos conducirá a obtener que $A_1 = B_1$, y siendo comunes las n — 1 últimas ecuaciones, será solución del sistema [1], es decir, los sistemas son equivalentes.

Un método sencillo y cómodo para resolver sistemas de ecuaciones es el que se basa en los determinantes, y se denomina *Regla de Cramer*, hasta el punto de que hoy día no se emplea casi otro, en especial cuando se trata de sistemas de tres o más incógnitas.

147. Deducción de la regla de Cramer.

Sea el sistema:

$$\text{(A)} \quad \left\{\begin{array}{ll} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & [3] \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 & [4] \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 & [5] \end{array}\right.$$

Designemos por Δ el *determinante del sistema*, es decir, el determinante formado por los coeficientes de las incógnitas, escritos en su mismo orden, siempre que no sea nulo dicho determinante.

Se llama *determinante de una incógnita* al que resulta de sustituir, en el sistema, la columna de los coeficientes de dicha incógnita por los términos independientes o constantes, con los signos que les corresponden cuando están solos en los segundos miembros de las ecuaciones. En el sistema dado los designaremos por Δ_x, Δ_y, Δ_z. Luego por definición:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Multiplicando la ecuación [3] por el adjunto A_1 de a_1, la [4] por el adjunto A_2 de a_2, la [5] por el adjunto A_3 de a_3, se obtiene:

$$\begin{aligned} A_1a_1x + A_1b_1y + A_1c_1z &= A_1d_1 \\ A_2a_2x + A_2b_2y + A_2c_2z &= A_2d_2 \\ A_3a_3x + A_3b_3y + A_3c_3z &= A_3d_3 \end{aligned}$$

Sumando estas ecuaciones y sacando x, y, z, factor común de todos los términos en que entren, resulta:

$$\begin{aligned} &(A_1a_1 + A_2a_2 + A_3a_3)\,x + (A_1b_1 + A_2b_2 + A_3b_3)\,y + \\ &+ (A_1c_1 + A_2c_2 + A_3c_3)\,z = A_1d_1 + A_2d_2 + A_3d_3 \end{aligned}$$

Siendo esta ecuación una combinación lineal de las tres ecuaciones del sistema dado, puede reemplazar a cualquiera de ellas. Además, en esta transformada el segundo miembro es Δ_x, desarrollado por la columna de las d; el coeficiente de x es Δ, desarrollado por la columna de la a, y los demás paréntesis son nulos, según el número 140. Queda, pues:

$$\Delta \cdot x = \Delta_x; \text{ de donde } x = \frac{\Delta_x}{\Delta}.$$

Haciendo lo mismo con los adjuntos B_1, B_2, B_3, de b_1, b_2, b_3, se llega a:

$$\Delta \cdot y = \Delta_y; \text{ de donde } y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Y luego, operando con los adjuntos C_1, C_2, C_3, de c_1, c_2, c_3, se llega a:

$$\Delta \cdot z = \Delta_z; \text{ de donde } z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

Luego hemos obtenido para valores de las incógnitas x, y, z, las tres expresiones:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad ; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \quad ; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \qquad [6]$$

De aquí la regla de Cramer, que dice:

1.° *Todo sistema lineal de* n *ecuaciones, no homogéneas, con* n *incógnitas, cuyo determinante no es nulo, tiene una solución única.*

2.° *El valor de cada incógnita es el cociente de dividir su determinante por el determinante del sistema.*

148. Discusión general.

Al aplicar la regla de Cramer a un sistema de n ecuaciones lineales, no homogéneas, con n incógnitas, pueden darse los siguientes casos:

1.° Que el denominador $\Delta \neq 0$; entonces el sistema es *compatible* y admite como solución única los resultados obtenidos por la regla. Por tanto, es *determinado* y sus ecuaciones son *independientes.*

2.° Que siendo $\Delta = 0$, también sean nulos los numeradores Δ_x, Δ_y, Δ_z; en este caso no podemos afirmar nada respecto al sistema, que puede ser indeterminado o incompatible, aunque en general es indeterminado. Por tanto, de ordinario las ecuaciones son *dependientes* o *combinaciones lineales* unas de otras.

3.° Si $\Delta = 0$, no siendo nulos Δ_x, Δ_y, Δ_z, es decir, los numeradores, se tendría las ecuaciones imposibles o absurdas:

$$0 \cdot x = \Delta_x \quad ; \quad 0 \cdot y = \Delta_y \quad ; \quad 0 \cdot z = \Delta_z$$

y el sistema es *imposible* o *incompatible.* Ningún número x multiplicado por 0 puede dar un número finito Δ_x. Las ecuaciones son en este caso *contradictorias.*

EJEMPLO 1.—*Resolver el sistema:*

$$\left.\begin{array}{rrrrr} 4x & - & 5y & + & 2z = 4 \\ 5x & + & 4y & - & 3z = 35 \\ 7x & - & 2y & - & 4z = 19 \end{array}\right\}$$

El determinante del sistema es distinto de cero, y vale:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & 4 & -3 \\ 7 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -159.$$

Los determinantes de las incógnitas x, y, z, son:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 35 & 4 & -3 \\ 19 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -795 \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 5 & 35 & -3 \\ 7 & 19 & -4 \end{vmatrix} = -636$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 4 \\ 5 & 4 & 35 \\ 7 & -2 & 19 \end{vmatrix} = -318.$$

Luego

$$x = \frac{-795}{-159} = 5 \quad ; \quad y = \frac{-636}{-159} = 4 \quad ; \quad z = \frac{-318}{-159} = 2$$

Antes de aplicar las fórmulas [6] es necesario escribir todas las ecuaciones exactamente en la misma forma que las dadas en el sistema (A) del mismo número.

Si falta algún término, se le suple poniéndole coeficiente cero.

EJEMPLO 2.—*Resolver el siguiente sistema por medio de determinantes:*

$$\left.\begin{aligned} 2x - 5y &= -19 \\ 3y + 4z &= -7 \\ 2z - 5x &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Solución: Primero, escribamos las ecuaciones en la forma debida, supliendo todas las letras que faltan y poniendo a cada una de ellas el coeficiente cero.

Así:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 5y + 0 \cdot z &= -19 \\ 0 \cdot x + 3y + 4z &= -7 \\ -5x + 0 \cdot y + 2z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Se tiene:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ -5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 112; \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} -19 & -5 & 0 \\ -7 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -224;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -19 & 0 \\ 0 & -7 & 4 \\ -5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 336; \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -5 & -19 \\ 0 & 3 & -7 \\ -5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 448.$$

Luego:

$$x = \frac{-224}{112} = -2; \qquad y = \frac{336}{112} = 3; \qquad z = \frac{-448}{112} = -4$$

EJEMPLO 3.—*Dado el sistema de ecuaciones lineales con las incógnitas* x, y, z:

$$\left.\begin{aligned} x + my + z &= m + 2 \\ x + y + mz &= -2(m+1) \\ mx + y + z &= m \end{aligned}\right\}$$

1.º, *halla cuáles son los valores del parámetro* m *para los que no se puede aplicar la regla de Cramer;* 2.º, *estúdialo para los casos comprendidos en el apartado* 1.º.

Solución: 1.º) La regla de Cramer no puede aplicarse en los casos en los que el determinante del sistema Δ sea igual a cero, o sea

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = m^3 - 3m + 2 = 0$$

Dicha ecuación se anula para $m = 1$, $m = -2$.

2.º) Para $m = 1$, el sistema es

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x + y + z &= -4 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Son evidentemente tres ecuaciones *contradictorias,* y el sistema *incompatible.* En efecto,

$$\Delta = 0,\ \Delta_x \neq 0,\ \Delta_y \neq 0,\ \Delta_z \neq 0$$

Para $m = -2$ el sistema es

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + z &= 0 \\ x + y - 2z &= 2 \\ -2x + y + z &= -2 \end{aligned}\right\}$$

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$$

Escribamos las dos primeras así:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y &= -z \\ x + y &= 2z + 2 \end{aligned}\right\}$$

y considerando z de momento como una cantidad conocida, resolvamos este sistema.

Se obtiene

$$x = z + \frac{4}{3}, \qquad y = z + \frac{2}{3}$$

Sustituyamos estos valores en la tercera ecuación:

$$-2\left(z+\frac{4}{3}\right)+\left(z+\frac{2}{3}\right)+z=-2z-\frac{8}{3}+z+\frac{2}{3}+z=$$

$$=\frac{-8+2}{3}=-\frac{6}{3}=-2$$

Luego se satisface. Por tanto, la solución

$$\mathbf{x=z+\frac{4}{3},\quad y=z+\frac{2}{3}}$$

satisface al sistema, cualquier valor que demos a z. A cada valor dado a z, corresponde otro para y y otro para x. Hay infinitas soluciones. El sistema es *indeterminado*. Las ecuaciones son *dependientes* o *combinaciones* lineales unas de otras. En efecto, sumando las dos últimas, se obtiene la primera cambiada de signo.

149. Sistemas de más ecuaciones que incógnitas.

Para resolver un sistema de más ecuaciones que incógnitas se procede del siguiente modo: de entre las ecuaciones dadas se toma un número de ellas igual al de incógnitas, y se resuelve el sistema formado por las mismas, siguiendo cualquiera de los métodos explicados anteriormente. Las soluciones obtenidas se reemplazan en las ecuaciones restantes. Si éstas quedan satisfechas, el sistema es *compatible*. En caso contrario, el sistema es *incompatible*.

EJEMPLO 1.—*Resolver el sistema:*

$$\left.\begin{aligned}2x-7y&=5\\4x+2y&=6\\5x-3y&=4\end{aligned}\right\}$$

Solución: Tomando el sistema formado por las dos primeras ecuaciones,

$$\left.\begin{aligned}2x-7y&=5\\4x+2y&=6\end{aligned}\right\}$$

se obtiene:

$$x=\frac{13}{8},\quad y=-\frac{1}{4}$$

valores que se sustituyen en la tercera ecuación:

$$5\cdot\frac{13}{8}-3\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{65}{8}+\frac{3}{4}=\frac{65+6}{8}=\frac{71}{8}\neq 4$$

Luego la tercera ecuación no se satisface.
El sistema es *incompatible*.

EJEMPLO 2.—*Resolver el sistema*

$$\left.\begin{array}{rrrrr} 2x & + 3y & + z & = & 2 \\ 3x & + 2y & + 4z & = & 13 \\ x & + 5y & - 3z & = & -13 \\ 2x & + y & - z & = & 2 \end{array}\right\}$$

Solución: Resolviendo el sistema formado por las tres últimas ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rrrrr} 3x & + 2y & + 4z & = & 13 \\ x & + 5y & - 3z & = & -13 \\ 2x & + y & - z & = & 2 \end{array}\right\}$$

se obtiene:

$$x = 3 \ , \ y = -2 \ , \ z = 2 \qquad [1]$$

Reemplazando estos valores en la primera ecuación:

$$2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) + 2 = 6 - 6 + 2 = 2$$

Luego dicha ecuación se satisface: el sistema es *compatible*. La solución viene dada por los valores [1].

150. Sistemas de más incógnitas que ecuaciones.

En este caso los términos que contienen las incógnitas sobrantes se trasponen al segundo miembro, y considerándolos como términos independientes se resuelve el sistema. Dando a dichas incógnitas valores arbitrarios, se obtendrá en general un número ilimitado de soluciones.

EJEMPLO.—Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{rrrrr} x & - y & + 2z & - 3u & = 7 \\ 2x & + y & - z & - 2u & = 5 \\ 3x & + 2y & - 5z & - u & = 4 \end{array}\right\}$$

Solución: Trasponiendo al segundo miembro los términos que contienen la incógnita u, se tiene:

$$\left.\begin{array}{rrrrr} x & - y & + 2z & = 7 + 3u \\ 2x & + 3y & - z & = 5 + 2u \\ 3x & + 2y & - 5z & = 4 + u \end{array}\right\}$$

Considerando los segundos miembros como los términos independientes, se resuelve este sistema; se obtiene:

$$x = -\frac{116}{30} + \frac{46}{30}u \ ; \ y = -\frac{14}{30} - \frac{4}{30}u \ ; \ z = \frac{40}{30} + \frac{20}{30}u$$

Podemos dar a u valores arbitrarios; entonces para cada valor de u corresponde otro para x, otro para y, otro para z. Así para:

$$u = 4$$

sale:

$$x = 10,\ y = -1,\ z = 4 \qquad [2]$$

Hay, pues, infinitas soluciones. El sistema es *indeterminado:* La solución [2] es una entre las infinitas posibles.

151. Sistemas lineales homogéneos.

Son aquellos cuyas ecuaciones tienen todos sus términos de primer grado. Carecen, pues, de términos independientes (grado cero).

Por ejemplo es homogéneo el sistema:

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [3]$$

Estos sistemas se resuelven trasponiendo los términos que contienen una de las incógnitas al segundo miembro, y considerando éstos como términos independientes. Después se procede como en uno de los dos casos anteriores.

Los sistemas homogéneos tienen siempre la solución evidente:

$$x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0,\quad \text{etcétera}$$

Pero esta solución trivial no se considera como verdadera solución, y se llama *compatible* al sistema sólo cuando tiene alguna solución distinta de ella.

Pero si existe una solución, existen también infinitas, que se obtienen multiplicando los valores de la primera por un número cualquiera.

Así, si una solución es

$$x = a,\ y = b,\ z = c,\ \text{etcétera} \qquad [4]$$

son también soluciones

$$x = ak,\ y = bk,\ z = ck,\ \text{etcétera} \qquad [5]$$

donde k es un número cualquiera. Pues si el sistema [3] se satisface con los valores [4], lo mismo sucede con los valores [5].

En consecuencia: Todo sistema lineal homogéneo que sea compatible es también indeterminado.

Para que esto se cumpla, se comprende que el determinante del sistema Δ ha de ser *nulo.*

EJEMPLO 1.—*Resolver el sistema:*

$$\left.\begin{aligned} x - y + 5z &= 0 \\ 2x + 3y - z &= 0 \\ 4x + y - 7z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Solución: Para que sea compatible el sistema, ha de ser $\Delta = 0$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -7 \end{vmatrix} = -80$$

El sistema es *incompatible.*

EJEMPLO 2.—Resolver el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y - 7z &= 0 \\ 5x + y - 3z &= 0 \\ 2x + y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Solución: $\Delta = 0$, luego el sistema es *compatible.*
Tomando las dos primeras ecuaciones y trasponiendo los términos que contienen z, queda el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y &= 7z \\ 5x + y &= 3z \end{aligned}\right\}$$

que resuelto, da:

$$x = z, \quad y = -2y$$

Sustituyendo estos valores en la tercera ecuación resulta:

$$2z - 2z = 0$$

Dicha ecuación se satisface. El sistema es *compatible.* Es también indeterminado, porque a cada valor que damos a z corresponde otro para x y otro para y.
Una solución es la que se obtiene haciendo $z = 1$:

$$x = 1; \quad y = -2; \quad z = 1$$

152. Problema.

Hallar el valor que ha de tener a *para que sea compatible el sistema:*

$$\left.\begin{aligned} x - 3y + 5z &= 0 \\ x - 2y + z &= 0 \\ 2x - 11y + az &= 0 \end{aligned}\right\}$$

y resolverlo para dicho valor a.

Solución: Ha de ser:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -11 & a \end{vmatrix} = a - 30 = 0 \quad ; \quad a = 30$$

Considerando las dos primeras ecuaciones y trasponiendo los términos que contienen z, resulta el sistema:

$$\begin{aligned} x - 3y &= -5z \\ x - 2y &= -z \end{aligned}$$

Resolviéndolo, sale:

$$x = 7z, \quad y = 4z$$

Sustituyendo en la tercera ecuación, se obtiene:

$$2 \cdot 7z - 11 \cdot 4z + az = 0$$

o sea:

$$14z - 44z + az = 0$$

Luego para que el sistema sea compatible, ha de verificarse que:

$$a = 44 - 14 = 30$$

La solución más sencilla se obtendrá haciendo en [6] $z = 1$, es decir:

$$\mathbf{x = 7 \ , \ y = 4 \ , \ z = 1}$$

Todas las demás soluciones resultan multiplicando estos valores por un número cualquiera.

EJERCICIOS

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por medio de determinantes:

1. $\left.\begin{array}{l} 6x + 4y - 7z = 17 \\ 9x + 7y - 16z = 29 \\ 10x + 5y - 3z = 23 \end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{l} -4x + 5y + 9z = 13 \\ -5x + y + 2z = -5 \\ 8x - \dfrac{1}{2}y + z = \dfrac{43}{2} \end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{l} 5x + 3y + 2z = \dfrac{9}{8} \\ 4x - 5y - \dfrac{2}{3}z = -1 \\ 8x - \dfrac{1}{2}y + z = \dfrac{7}{12} \end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{l} x - y = 2a \\ -ax + z = -a^2 \\ bx - z = b^2 \end{array}\right\}$

5. $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y - 4z = 4 \\ 3x + 5y + 7z = 12 \\ 5x - y + 8z = 5 \end{array}\right\}$

6. **Discutir el sistema**

$$\left.\begin{array}{l} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{array}\right\}$$

según los diferentes valores de a y b.

7. Las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{5} - \frac{y}{2} + \frac{z}{6} &= -1 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{4} + \frac{z}{3} &= 5 \\ \frac{x}{10} - \frac{y}{8} + \frac{z}{6} &= 1 \end{aligned}\right\}$$

son, en metros, las longitudes de los tres lados de un triángulo: Hallar: 1.º, la naturaleza del triángulo; 2.º, su área; 3.º, el radio del círculo circunscrito.

8. Sea el sistema

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 10 \\ x - my &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Se pregunta: 1.º, valor de m para que en la solución del sistema x valga cero; 2.º, valor de m para que el sistema sea incompatible; 3.º, significado geométrico de las dos cuestiones.

9. Discutir el sistema

$$\left.\begin{aligned} x - 3y + 5z &= 2 \\ 2x - 4y + 2z &= 1 \\ 5x - 11y + 9z &= k \end{aligned}\right\}$$

según los valores del parámetro k.

10. Resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{3x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{2z} &= 27 \\ \frac{4}{5x} + \frac{7}{8z} - \frac{1}{4u} &= 9 \\ \frac{1}{x} + \frac{5}{6y} - \frac{2}{31u} &= 27 \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{u} &= 180 \end{aligned}\right\}$$

11. Resolver y discutir el sistema

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz &= 1 \\ bx + cy + az &= 1 \\ cx + ay + bz &= 1 \end{aligned}\right\}$$

12. Determinar a para que sea compatible el sistema

$$\left.\begin{aligned} x + \frac{y}{2} - \frac{z}{3} &= 8 \\ \frac{x}{14} - \frac{y}{6} + \frac{z}{6} &= \frac{1}{2} \\ 4 - \left(x - \frac{y}{2}\right) &= y - z \\ 2x - 3y + z &= 4a \end{aligned}\right\}$$

y resolverlo por determinantes.

13. Calcular el valor de z en el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \frac{Pal^2}{3} + yl + z &= 0 \\ \frac{Pa^3}{3} &= ya + z - xa \\ \frac{Pa^2}{2} &= y - x \end{aligned}\right\}$$

14. Resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} x - y &= z - 8 \\ x + y &= u + 2 \\ 2u &= y + z - 13 \\ x &= 2z - 3u - 17 \end{aligned}\right\}$$

15. Dado el sistema

$$\left.\begin{aligned} 3x - 4y - z &= -10 \\ 8x - 8y + 5z &= 12 \\ x + 5y - kz &= 5 \\ -6x + 2y + 6z &= 18 \end{aligned}\right\}$$

determinar k para que el sistema sea compatible.

16. Demostrar que el sistema

$$\left.\begin{aligned} x &= by + cz \\ y &= ax + cz \\ z &= ax + by \end{aligned}\right\}$$

admite una solución distinta de $x = y = z = 0$, si se verifica que

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2$$

17. Deteminar la compatibilidad y soluciones del sistema

$$\left.\begin{array}{rcr} 11x + 5y = & 21 \\ 7x - 4y = & -1 \\ 4x - 8y = & -12 \end{array}\right\}$$

18. Dado el sistema

$$\left.\begin{array}{c} 2x - y = 7 \\ (3 + \alpha)\, x + (4 + \beta)\, y = 3 \end{array}\right\}$$

determinar α y β para que: 1.º, sea incompatible; 2.º, sea indeterminado.

19. Resolver y discutir el sistema

$$\left.\begin{array}{rcr} \lambda x + y + z = & 1 \\ x + \lambda y + z = & \lambda \\ x + y + \lambda z = & \lambda^2 \end{array}\right\}$$

según los valores de λ.

20. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcr} a^3 + a^2x + ay + z = & 0 \\ b^3 + b^2x + by + z = & 0 \\ c^3 + c^2x + cy + z = & 0 \end{array}\right\}$$

21. Halla el valor de a que hace compatible el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcr} 2x + y - 4z = & a \\ 3x - 2z = & 11 \\ y + z = & 6 \\ 2y - z = & a \end{array}\right\}$$

y resuelve el sistema después de sustituir a por el valor numérico obtenido.

22. Determina los valores de m que hacen compatible el sistema de ecuaciones homogéneas.

$$\left.\begin{array}{rcr} 2x - my + 4z = & 0 \\ x + y + 7z = & 0 \\ mx - y + 13z = & 0 \end{array}\right\}$$

y resuelve el sistema resultante.

13

POLINOMIOS CON UNA INDETERMINADA

153. Definición de polinomio con una indeterminada.

Suponemos, por un lado, definido el cuerpo Q de los números racionales, u otro cuerpo cualquiera, como el de los números reales (*cuerpo básico*). Por otro lado, consideremos una *indeterminada* x, que lo mismo puede ser un número que otro ente cualquiera. No es aquí, pues, lo mismo que en una ecuación, en que x (*incógnita*) representa unos números determinados, o que en una función, en que x (*variable*) representa un conjunto de números comprendidos dentro de un intervalo.

Se define en primer lugar un *monomio*, expresión de la forma ax^n, en que $a \in Q$, y se llama *coeficiente*, y x^n es un elemento que se deduce de la indeterminada x por una operación de multiplicación, y se llama *parte literal*.

Un polinomio es la suma de un número finito de monomios, escribiéndose:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \quad (a_n \neq 0)$$

Ya que la indeterminada x representa un ente cualquiera, modernamente se tiende a prescindir de ella y a representar un polinomio por sus coeficientes, así:

$$P = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, 0 \ldots)$$

Según esta concepción, se define:

Polinomio es una sucesión infinita de elementos del cuerpo básico Q, *tal que a partir de uno de ellos todos los elementos de la sucesión son nulos.*

Si $a_n \neq 0$, y todos los restantes coeficientes que vienen por detrás son nulos, el polinomio se dice de *grado n.*

Si todos los coeficientes de un polinomio son nulos, el polinomio se llama *idénticamente nulo.*

Dos polinomios A y B son *iguales* o *idénticos* si tienen iguales coeficientes.

Comprobarás fácilmente que ésta es una *relación de igualdad,* pues goza de las tres propiedades: reflexiva, simétrica y transitiva.

154. Adición de polinomios.

Recordamos que en el Algebra elemental se definía la adición de polinomios de modo que se verificaran las mismas leyes formales que en la adición de polinomios numéricos, o sea, por ejemplo:

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2) + (b_0 + b_1x + b_2x^2) = a_0 + b_0 + a_1x + b_1x + \\ + a_2x^2 + b_2x^2 = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\,x + (a_2 + b_2)\,x^2$$

Con la representación moderna, definimos:

$$A + B = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots) + (b_0, b_1, \ldots, b_n, 0, 0 \ldots) = \\ = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n, 0, 0 \ldots)$$

155. Propiedades de la adición de polinomios.

I. *Uniforme,* como consecuencia de la definición dada de polinomios iguales.

II. *Conmutativa:*

$$A + B = B + A$$

Ya que $a_i + b_i = b_i + a_i$, por tratarse de un cuerpo de números.

III. *Asociativa:*

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

Ya que

$$(a_i + b_i) + c_i = a_i + (b_i + c_i)$$

IV. *Existencia de un elemento neutro,* que es el polinomio idénticamente nulo, ya que

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots) + (0, 0, 0, \ldots) = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$$

V. *Existencia del elemento simétrico.* Llamaremos *opuesto* de un polinomio cualquiera al que tiene los mismos coeficientes cambiados de signo. Se verifica:

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots) + (-a_0, -a_1, \ldots, -a_n, 0, 0, \ldots) = (0, 0, 0, 0, \ldots)$$

Por cumplir estas cinco propiedades, *el conjunto de los polinomios con una indeterminada tiene la estructura de grupo aditivo conmutativo.*

156. Sustracción de polinomios.

La última propiedad del número anterior nos permite asegurar que *la sustracción de dos polinomios siempre es posible:*

$$X = A - B = A + (-B)$$

llamando $-B$ al polinomio opuesto al B.

Para restar dos polinomios se suma al minuendo el opuesto al sustraendo.

157. Multiplicación de polinomios.

Siempre fieles al principio de la permanencia de las leyes formales, en el Algebra elemental definimos la multiplicación de polinomios por el siguiente esquema:

$$\begin{array}{l} A = a_0 + a_1x + a_2x^2 \\ B = b_0 + b_1x + b_2x^2 \\ \hline a_0b_0 + a_1b_0x + a_2b_0x^2 \\ \quad + a_0b_1x + a_1b_1x^2 + a_2b_1x^3 \\ \qquad\quad a_0b_2x^2 + a_1b_2x^3 + a_2b_2x^4 \\ \hline a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)\,x + (a_0b_2 + a_1\,b_1 + a_2b_0)\,x^2 + \ldots \end{array}$$

Definiremos, pues,

$$A \cdot B = (a_0b_0\ ,\ a_0b_1 + a_1b_0\ ,\ a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0\ ,\ \ldots)$$

El cuadro siguiente proporciona una manera cómoda de calcular en la práctica los coeficientes del polinomio $A \cdot B$:

	a_0	a_1	a_2	a_3
b_0	a_0b_0	a_1b_0	a_2b_0	a_3b_0
b_1	a_0b_1	a_1b_1	a_2b_1	a_3b_1
b_2	a_0b_2	a_1b_2	a_2b_2	a_3b_2
b_3	a_0b_3	a_1b_3	a_2b_3	a_3b_3

Los coeficientes de $A \cdot B$ no son otros que las sumas de los elementos de las diagonales del cuadro.

158. **Propiedades de la multiplicación de polinomios.**

I'. *Uniforme:* Consecuencia de la definición de polinomios iguales.

II'. *Conmutativa:*

$$A \cdot B = B \cdot A$$

III'. *Asociativa:*

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

IV'. *Elemento unidad.* El polinomio $I = (1, 0, 0, \ldots)$ es el elemento neutro para la multiplicación, ya que

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

V'. *Distributiva respecto a la adición*

$$(A + B)\ C = AC + BC$$

En virtud de estas propiedades, *el conjunto de los polinomios con una indeterminada es un semigrupo multiplicativo con elemento unidad.*

Y teniendo en cuenta, además, las propiedades de la adición, resulta que *el conjunto de polinomios con una indeterminada es un anillo conmutativo unitario.*

159. **División exacta de polinomios.**

Esta división no siempre es posible, ya que dado un polinomio A, no siempre tiene otro inverso, o sea, no siempre existe otro polinomio B tal que $A \cdot B = 1$, designando por 1 el polinomio unidad $I = (1, 0, 0, \ldots)$. En efecto, si quisiéramos resolver este problema, encontraríamos un sistema de más ecuaciones que incógnitas, que en general no tiene solución.

Entonces se impone la introducción del concepto de *división entera.*

160. **División entera de polinomios.**

La suma, diferencia y producto de polinomios es otro polinomio. Es decir, dentro del campo de las expresiones enteras son siempre posibles la suma, resta y multiplicación. Por eso a estas operaciones se denomina *operaciones enteras.* En cambio, dados dos polinomios A y B, no es siempre posible hallar otro polinomio que sea el *cociente*

exacto entre los dos. Pero es siempre posible *hallar un polinomio* C *y otro* R *que cumplan con las condiciones:*

$$A = B \cdot C + R$$

$$\text{grado de } R < \text{grado } B$$

Este es el problema de la *división entera; C* es el *cociente entero* y *R* es el *resto.* Como caso particular tenemos la *división exacta,* que tiene lugar cuando $R = 0$.

La determinación de los polinomios *C* y *R* se hace fácilmente, observando que *si* A *y* B *se ordenan en sentido decreciente y dividimos los primeros términos de ambos polinomios, la diferencia entre* A *y el producto por* B *del monomio obtenido es de grado menor que el de* A.

En efecto, sea a_0x^m el primer término de *A*, b_0x^n el primer término de *B*, y $c_0 = \dfrac{a_0}{b_0}$ el cociente de a_0 por b_0. Al restar de *A* el producto Bc_0x^{m-n}, el término a_0x^m se reduce con el primero del polinomio sustraendo, o sea, con $b_0x^n \cdot c_0x^{m-n} = a_0x^m$. Luego la diferencia será, a lo más, de grado $m - 1$.

Llamemos A_1 dicha diferencia, y C_1 al monomio c_0x^{m-n}. Se tendrá

$$A = B \cdot C_1 + A_1 \qquad [1]$$

siendo el grado de A_1 menor que el grado de *A*. Si fuera menor que el grado de *B*, el monomio C_1 sería el cociente entero y A_1 el resto de la división. En caso contrario dividiremos el primer término de A_1 por el primero de *B*, obteniendo por cociente un monomio C_2. Llamemos A_2 la diferencia entre A_1 y el producto BC_2. Se tendrá

$$A_1 = BC_2 + A_2 \qquad [2]$$

siendo el grado de A_2 menor que el grado de A_1. Sustituyendo [2] en [1] se deduce

$$A = BC_1 + BC_2 + A_2 = B(C_1 + C_2) + A_2$$

Prosiguiendo del mismo modo todo lo que sea necesario, llegamos finalmente al resultado

$$A = B(C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_h) + A_h$$

en la que ya A_h es de grado inferior al de *B*. Los polinomios $C = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_h$ y A_h son, respectivamente, el cociente y el resto de la división de *A* por *B*. Del razonamiento anterior se deduce la siguiente

REGLA.—*Para dividir dos polinomios enteros en* x, *se ordenan en sentido decreciente y se divide el primer término del dividendo por el primero del divisor; el resultado se multiplica por el divisor y el producto se resta del dividendo. Con la diferencia que resulta se procede del mismo modo que con el dividendo, y así se continúa hasta obtener una diferencia nula o de grado menor que el divisor. El cociente entero es el polinomio formado por los cocientes parciales obtenidos, y la última diferencia es el resto.*

EJEMPLO.—Sea la división

$$\begin{array}{rl} 35x^5 + 56x^4 - 113x^3 + 5x^2 + 95x - 23 & \mid 5x^2 + 8x - 9 \\ -35x^5 - 56x^4 + 63x^3 & \mid \overline{7x^3 - 10x + 17} \\ \hline -50x^3 + 5x^2 + 95x & \\ +50x^3 + 80x^2 - 90x & \\ \hline 85x^2 + 5x - 23 & \\ -85x^2 - 136x + 153 & \\ \hline -131x + 130 & \end{array}$$

El caso particular más importante de división de polinomios es aquel en que el divisor es de primer grado, que sin restar nada a la generalidad podemos suponer igual a $x - a$.

161. División de un polinomio ordenado en x por el binomio $x - a$.

Se trata de dividir un polinomio de grado cualquiera por el binomio $x - a$, donde a representa un número conocido.

Sea, por ejemplo, la división:

$$\begin{array}{rl} Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E & \mid x - a \\ -Ax^4 + Aax^3 & \mid \overline{Ax^3 + B'x^2 + C'x + D'} \\ \hline B'x^3 + Cx^2 & \\ -B'x^3 + B'ax^2 & \\ \hline C'x^2 + Dx & \\ -C'x^2 + C'ax & \\ \hline D'x + E & \\ -D'x + D'a & \\ \hline R & \end{array}$$

Dividiendo el primer término del dividendo por el primero del divisor resulta Ax^3, que es el primer término del cociente. Se multiplica cada término del divisor $x - a$ por Ax^3, obteniéndose el polinomio $Ax^4 - Aax^3$, que se cambia de signo, se escribe debajo del dividendo y se suma con él. Llamando B' a la suma $Aa + B$, o sea:

$$B' = Aa + B \qquad [3]$$

la suma es $B'x^3 + Cx^2 + Dx + E$, que se vuelve a dividir por $x - a$. El segundo término del cociente es $B'x^3 : x = B'x^2$, que multiplicado por el divisor y cambiado de signo da $- B'x^3 + B'ax^2$. Este se escribe debajo del primer dividendo parcial y se suma con él. Llamando:

$$C' = B'a + C \qquad [4]$$

se obtiene como segundo dividendo parcial $C'x^2 + Dx + E$. Se continúa del mismo modo, obteniéndose $C'x$ como tercer término del cociente, y llamando:

$$D' = C'a + D \qquad [5]$$

el tercer dividendo parcial será $D'x + E$. Finalmente, el cuarto término del cociente es D' y el resto R vale $D'a + E$, o sea:

$$R = D'a + E \qquad [6]$$

Se observa que:

REGLA DE RUFFINI: 1.º *El coeficiente del primer término del cociente es igual al coeficiente del primer término del dividendo.*

2.º *El coeficiente de cualquier término restante del cociente se obtiene multiplicando el coeficiente del término anterior por* a *y sumando luego el coeficiente del término de igual orden del dividendo.* (Relaciones [3], [4] y [5].)

3.º *El resto se obtiene multiplicando por* a *el último coeficiente del cociente y sumando luego el último coeficiente del dividendo.* (Relación [6].)

4.º *El grado del cociente es inferior en una unidad al del dividendo.*

EJEMPLO 1.—*Dividir* $x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 16x - 10$ *por* $x - 2$.

Los coeficientes del cociente serán, según la regla de Ruffini, ya que aquí $a = 2$:

$$1 \quad ; \quad 1 \cdot 2 - 3 = -1 \quad ; \quad -1 \cdot 2 - 5 = -7 \quad ; \quad -7 \cdot 2 + 16 = 2$$

Luego el cociente es:

$$x^3 - x^2 - 7x + 2,$$

ya que su grado ha de ser inferior en una unidad al del dividendo; y el resto:

$$R = 2 \cdot 2 - 10 = -6$$

La disposición práctica de las operaciones es la siguiente:

$$\begin{array}{rccccc|c} & 1 & -3 & -5 & 16 & -10 & \\ & & 2 & -2 & -14 & 4 & \\ 2) & \multicolumn{6}{c}{\text{———————————————}} \\ & 1 & -1 & -7 & -2 & -6 & = R \end{array}$$

En la primera fila se escriben los coeficientes del polinomio dividendo, poniendo *cero* cuando falta algún término; debajo de la raya horizontal aparecen los coeficientes del cociente, y en la fila intermedia, los productos de éstos por 2.

EJEMPLO 2.—*Dividir* $x^5 - 7x^3 + 5x + 3$ *por* $x + 1$.
En este caso $x + 1 = x - (-1)$; o sea: $a = -1$.

$$\begin{array}{rcccccc|c} & 1 & 0 & -7 & 0 & 5 & 3 & \\ & & -1 & 1 & 6 & -6 & 1 & \\ -1) & \multicolumn{7}{c}{\text{———————————————}} \\ & 1 & -1 & -6 & 6 & -1 & 4 & = R \end{array}$$

El cociente es $x^4 - x^3 - 6x^2 + 6x - 1$, y el resto, 4.

EJEMPLO 3.—*Dividir* $x^5 - a^5$ *por* $x - a$.
Se dispone como en los ejemplos anteriores:

$$\begin{array}{rccccc|c} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a^5 \\ & & a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 \\ a) & \multicolumn{6}{c}{\text{———————————————}} \\ & 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 & 0 = R \end{array}$$

El cociente es $x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4$, y el resto, es cero.

162. Teorema del resto.

El resto de la división de un polinomio por el binomio x — a *es igual al mismo polinomio dividendo, en el que se ha cambiado* x *por* a.

Sea $f(x)$ el polinomio dividendo, $Q(x)$ el polinomio cociente, y R el resto, que será independiente de x, ya que el divisor $x - a$ es de grado 1. Se tiene la siguiente identidad:

$$f(x) \equiv (x - a)\, Q(x) + R \qquad [7]$$

Sustituyendo x por a, se tiene:

$$\therefore f(a) \equiv (a - a)\, Q(a) + R$$
$$\therefore f(a) \equiv R \qquad \text{c. q. d.}$$

Según este teorema, puede hallarse el valor de $f(x)$ para $x = a$, dividiendo $f(x)$ por $x - a$. Para efectuar esta división basta aplicar la *regla de Ruffini*, y se procede como se indica en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO.—*Hallar el valor del polinomio* $x^4 - x^3 - 5x^2 + 4x - 3$ *para* $x = 3$:

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & -1 & -5 & +4 & -3 \\ & & +3 & +6 & +3 & +21 \\ 3) & \multicolumn{5}{c}{\text{---------------------------}} \\ & 1 & 2 & 1 & 7 & (18) = \text{resto} \end{array}$$

$$\therefore f(3) = 18$$

En efecto:

$$f(3) = 3^4 - 3^3 - 5 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 - 3 = 81 - 27 - 45 + 12 - 3 = 18$$

En este ejemplo el cociente es $x^3 + 2x^2 + x + 7$.

163. Teorema del factor.

La consecuencia del teorema anterior se suele llamar *teorema del factor*, que se enuncia y se demuestra como sigue:

La condición necesaria y suficiente para que un polinomio sea divisible por x — a *es que se anule al sustituir en él* x *por* a.

En efecto, si la división es exacta, es decir, si el resto es cero, el polinomio dividendo se anula al sustituir x por a. Recíprocamente, si al sustituir x por a en el dividendo éste se anula, el resto será nulo y la división será exacta. Entonces en la identidad [7] del número anterior se tendrá:

$$f(x) = (x - a)\ Q(x)$$

Luego $x - a$ es un factor del dividendo $f(x)$, y el otro factor es $Q(x)$. Este teorema nos permitirá hallar fácilmente las raíces enteras de una ecuación de grado n cualquiera, como indican los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 1.—*Por medio del teorema del factor, hallar las raíces enteras de la ecuación* $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$.

Solución: Si el polinomio del primer miembro tiene factores de la forma $x - a$, siendo a entero, debe ser a divisor de 18. Pues entonces el polinomio es divisible por $x - a$, y, en virtud del teorema del factor, se tendrá:

$$a^3 + 2a^2 - 9a - 18 = 0$$

o sea,

$$a\ (a^2 + 2a - 9) = 18$$

Por tanto:

$$\frac{18}{a} = a^2 + 2a - 9$$

donde el segundo miembro es un número entero, por serlo a. Luego $\frac{18}{a}$ es entero y a es un divisor de 18. Por tanto, a puede valer:

$$\pm 1. \quad \pm 2, \pm 3, \quad \pm 6, \pm 9, \quad \pm 18.$$

Hay que comprobar estos posibles valores. Sustituyéndolos en el polinomio dado, hallamos:

Para hallar $f(1)$, apliquemos la Regla de Ruffini, y como se obtiene $f(1) = -24$, se sigue que $x - 1$ no es un factor.

Análogamente hallamos:

$f(1) = -8$; $\therefore x + 1$ no es un factor;
$f(2) = -20$; $\therefore x - 2$ no es un factor;
$f(-2) = 0$; $\therefore x + 2$ es un factor.

Dividamos el polinomio por $x + 2$:

	1	+ 2	− 9	− 18
		− 2	0	18
− 2)				
	1	0	− 9	0 = R

Por tanto, resulta el cociente $x^2 - 9$, que es igual a $(x + 3)(x - 3)$. Luego:

$$x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = (x + 2)(x + 3)(x - 3)$$

y la ecuación dada admite las raíces $x = -2$, $x = 3$, $x = -3$.

EJEMPLO 2.—*Hallar las raíces enteras de la ecuación* $17x^3 - 14x^2 - 37x - 6 = 0$.

Solución: Los factores en que puede descomponerse el 6 son:

$$\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 3, \quad \pm 6$$

Estos son los posibles valores de a:

Por la Regla de Ruffini hallamos $f(1) \neq 0$; luego $x - 1$ no es factor. Pero $f(-1) = 0$, luego $x + 1$ es factor. Dividiendo $17x^3 - 14x^2 - 37x - 6$ por $x + 1$ resulta el cociente $17x^2 - 31x - 6$, que a su vez es divisible por $x - 2$. Los cálculos pueden disponerse así:

	17	− 14	− 37	6
		− 17	31	6
− 1)				
	17	− 31	− 6	0 = R
		34	6	
2)				
	17	3	0 = R	

El cociente es $17x + 3$. Luego

$$17x^3 - 14x^2 - 37x - 6 = (x + 1)(x - 2)(17x + 3)$$

y las raíces de la ecuación dada son

$$x = -1, \qquad x = 2, \qquad x = -\frac{3}{17}$$

164. Aplicación a la obtención de condiciones de divisibilidad.

I. *Demostrar que* $x^n - a^n$ *es divisible por* $x - a$ *cualquiera que sea* n.

Demostración: Según el teorema del resto, éste valdrá

$$R = a^n - a^n = 0$$

Luego $x^n - a^n$ es divisible por $x - a$.
Así $15^7 - 4^7$ es divisible por $15 - 4 = 11$.

II. *Demostrar que* $x^n + a^n$ *no es divisible por* $x - a$.
Demostración: Según el teorema del resto, éste valdrá

$$R = a^n + a^n = 2a^n$$

Luego $x^n + a^n$ no es divisible por $x - a$, ya que el resto no es nulo.

III. *Hallar si* $x^n - a^n$ *es divisible por* $x + a$.
Discusión: Según el teorema del resto:

$$(-a)^n - a^n = R$$

Si n es número par $(-a)^n = a^n$, y será $R = 0$.
Si n es un número impar $(-a)^n = -a^n$, y será $R = -2a^n$.
Luego, para n par, $x^n - a^n$ es divisible por $x + a$; y para n impar, $x^n - a^n$ no es divisible por $x + a$.

IV. Análogamente al caso III, se demuestra que $x^n + a^n$ es divisible por $x + a$ si n es impar, y no lo es si n es par.

EJEMPLO 1.—*Dividir el polinomio* $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ *por* $x + y + z$.

Solución: Estos polinomios pueden considerarse como polinomios en x. Por tanto, el divisor es de la forma $x - a$, siendo

$$a = -(y + z)$$

El resto de la división será

$$R = -(y + z)^3 + y^3 + z^3 + 3(y + z)yz =$$
$$= -y^3 - 3y^2z - 3yz^2 - z^3 + y^3 + z^3 + 3y^2z + 3yz^2 = 0$$

Luego la división es exacta, y el cociente se obtiene por la Regla de Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3yz & y^3+z^3 \\ & & -(y+z) & y^2+z^2+2yz & -y^3-z^3 \\ -(y+z) & \hline & 1 & -(y+z) & y^2+z^2-yz & 0 \end{array}$$

El cociente es

$$x^2-(y+z)\,x+y^2+z^2-yz = x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz$$

EJEMPLO 2.—*Demostrar que si* m *es compuesto, también lo es* 2^m-1.

Solución: Si $m = a \cdot b$, se verifica que

$$2^m-1 = (2^a)^b-1$$

que en virtud de 164-I es divisible por 2^a-1. Luego es compuesto.

EJERCICIOS

1. Dividir x^6-y^6 por $x-y$.
2. Racionalizar el denominador de la fracción

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}$$

3 Obtener las raíces enteras de las siguientes ecuaciones:
   a) $x^3-x^2-14x+24=0$.
   b) $2x^4+7x^3+4x^2-7x-6=0$.
   c) $x^4-2x^3-7x^2+8x+12=0$.
   d) $x^4-5x^3+5x^2-x-12=0$.

4. Racionalizar el denominador de la fracción

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{x}-1}$$

5. Determinar los coeficientes a y b para que el polinomio x^3+6x^2+ax+b sea divisible por x^2-4.
6. Hallar un polinomio de segundo grado tal que al dividirlo por $x-1$ da de resto 1, al dividirlo por $x-2$ da de resto 2 y al dividirlo por $x-3$ da de resto 4.
7. Efectuar el cociente $(x^{-1}-a^{-1}) : (x^{-1/3}-a^{-1/3})$.
8. Hallar el cociente y el resto de las divisiones:
   a) $8x^8-5x^6+9x^5-x^2+10x : x+4$.
   b) $14x^8-16x^6+3x^5+x+17 : x+2$.
   c) $x^4-3x^3-12x^2+52x-48 : x+4$.
   d) $x^5-3x^3-54x-2 : x+3$.

9. Dado el polinomio $x^4 + 3b^2x^2 - mb^3x + b^4$, determinar el valor de m que hace este polinomio divisible por $x - b$.

10. Calcular el cociente y el resto de la división

$$6x^4 - 7x^3 - bx^2 - 3x + 2 : x^2 - x + a$$

y determinar los coeficientes a y b para que el resto sea nulo, cualquiera que sea el valor de x.

11. En la división

$$x^5 - 2x^2 + 4x + a : 2x + 1$$

determinar a para que la división sea exacta.

12. Resolver la ecuación $x^6 - x^5 - 6x^4 - x^2 + x + 6 = 0$, aplicando la Regla de Ruffini.

13. Dividir, aplicando la Regla de Ruffini:

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 - 4xyzt : x + y + z + t$$

14. Hallar un polinomio de cuarto grado tal que adquiere los valores 3, 4, 5, 6 y 7, respectivamente, para los valores de x iguales a -1, -2, 0, 1 y 2.

15. Un polinomio de tercer grado, cuyo primer coeficiente es la unidad, es divisible por $x - 2$ y por $x + 1$, y al dividirlo por $x - 3$ da de resto 20. ¿Qué resto daría al dividir dicho polinomio por $x + 3$?

16. Los restos de la división de un polinomio entero en x por los binomios $x + 1$, $x - 1$, $x - 2$ son, respectivamente, 5, -1 y -1. Hallar el resto de la división de dicho polinomio por el producto $(x^2 - 1)(x - 2)$.

17. Hallar el cociente completo de la división

$$8a^2x^5 : 2ax^3 + 4a^4 - a^2x^2$$

18. Hallar el valor numérico del polinomio $x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 3$ para $x = 2$.

19. Demostrar que, siendo n un número entero cualquiera, es

$$\frac{n^5 - 5n^3 + 4n}{n + 2}$$

siempre divisible por 24.

20. Hallar un polinomio de tercer grado cuyo primer coeficiente es la unidad, sabiendo que los restos obtenidos al dividirlo por $x + 3$, $x - 2$ y $x + 1$ son 10, 20 y 8.

21. Se tiene el polinomio $P(x) = x^3 - ax^2 + bx - c$, donde $a = 21_{(n}$, $b = 113_{(n}$, $c = 33_{(n}$ y $a + b + c = 47_{(10}$. Se pide: a) hallar, en el sistema decimal, los valores de a, b y c; b) sustituidos los valores hallados en la expresión de $P(x)$, resolver la ecuación $P(x) = 0$.

22. Sabiendo que $x = c$ es una raíz de la ecuación

$$ax^5 + (b - ac)x^4 - bcx^3 - bx^2 - (a - bc)x + ac = 0$$

obtener las otras cuatro.

14

PRINCIPIO DE IDENTIDAD DE POLINOMIOS

165. Descomposición factorial de polinomios de una variable.

Si un polinomio reducido de grado n *se anula para* n *valores,* $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$, *de su variable, distintos entre sí, es equivalente al producto de su primer coeficiente,* a_0, *por* $(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \ldots (x - r_n)$.

Demostración: Sea el polinomio de grado n

$$f(x) \equiv a_0x^n + a_1 x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$$

Por hipótesis, admite la raíz r_1. Luego, en virtud del teorema del factor, $x - r_1$ es un divisor de $f(x)$, y se puede escribir

$$f(x) \equiv (x - r_1)\, Q_1(x) \qquad [1]$$

donde $Q_1(x)$ es un polinomio de grado $n - 1$, que tiene a_0x^{n-1} como término de mayor grado.

Puesto que $f(x)$ se anula también para $x = r_2$, ha de suceder lo mismo con el segundo miembro de [1], y como $(x - r_1)$ no se anula para $x = r_2$, ha de hacerlo $Q_1(x)$, es decir, $Q_1(r_2) = 0$.

Luego $x - r_2$ es un factor de $Q_1(x)$. O sea

$$Q_1(x) = (x - r_2)\, Q_2(x)$$

y sustituyendo en [1]

$$f(x) = (x - r_1)(x - r_2)\, Q_2(x) \qquad [2]$$

donde $Q_2(x)$ es un polinomio de grado $n - 2$ cuyo término de mayor grado es a_0x^{n-2}.

Continuando este proceso n veces, obtenemos

$$f(x) = (x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_n)\, Q_n(x)$$

donde $Q_n(x)$ es un polinomio de grado $n - n = 0$, cuyo término único vale $a_0x^0 = a_0$. Es decir, $Q_n(x)$ es la constante a_0. Luego

$$\mathbf{f(x) = a_0 (x - r_1) (x - r_2) \ldots (x - r_n)} \qquad [3]$$

Si en esta fórmula sustituímos x por r_{n+1}, un nuevo valor distinto de las n raíces anteriores, siendo distintos de cero todos los factores del segundo miembro, resultará $f(r_{n+1}) \neq 0$. Es decir:

Un polinomio reducido de grado n *no puede anularse para más de* n *valores distintos de su variable.*

EJEMPLO.—*Descomponer en factores el polinomio* $2x^3 - 3x^2 - 9x + 10$.

Solución: Las posibles raíces que lo anulan son ± 1, ± 2, ± 5 y ± 10.

Sustituyendo estos valores en el polinomio dado, se observa que solamente lo anulan los valores 1 y — 2. Luego dispondremos así los cálculos, dividiendo sucesivamente el polinomio dado por los binomios $x - 1$ y $x + 2$:

	2	— 3	— 9	10	
		2	— 1	— 10	
1)					
	2	— 1	— 10	0	= R
		— 4	10		
— 2)					
	2	— 5	0	= R	

El cociente es $2x - 5$. Por tanto:

$$\mathbf{2x^3 - 3x^2 - 9x + 10 = (x - 1) (x + 2)(2x - 5)}$$

EJEMPLO 2.—*Descomponer* $8y^3 - 27b^3$ *en producto de factores.*

Solución: Se tiene:

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$$

Haciendo $8y^3 = (2y)^3 = x^3$, y $27b^3 = (3b)^3 = a^3$, o sea llamando $2y = x$, $3b = a$, resulta:

$$\mathbf{8y^3 - 27b^3 = (2y - 3b)(4y^2 + 6yb + 9b^2)}$$

166. Principio de identidad de los polinomios de una variable.

En la lección anterior estudiamos los polinomios desde un punto de vista meramente formal, estando la x desprovista de un significado concreto, por lo que la llamábamos *indeterminada.* En esta lección, en cambio, suponemos que x es una *variable,* pudiendo tomar valores elegidos dentro del cuerpo R de los números reales. En estas condiciones el polinomio $P(x)$ define una correspondencia entre los

conjuntos x y $P(x)$, llamada *función polinomio.* A cada valor de x hace corresponder otro de $P(x)$, denominado *valor numérico* del polinomio para dicho valor de x.

Vamos a ver *(principio de identidad de polinomios)* que dos polinomios que toman los mismos valores numéricos para cualquier valor de la variable, representan la misma función, o sea son idénticos: tienen todos sus coeficientes iguales.

En efecto, se verifican los siguientes teoremas:

1.º *Si un polinomio se anula para más valores de la variable que los que indica su grado, es idénticamente nulo.*

Según lo demostrado en el número anterior, solamente siendo nulos todos los coeficientes puede cumplirse esta condición.

2.º *Si dos polinomios* f(x) *y* g(x) *toman iguales valores numéricos para un número de valores de* x *superior al grado de ambos, los polinomios son idénticos.*

Pues entonces $f(x) - g(x)$ se anula para un número de valores superior a su grado. Luego es idénticamente nulo. Por tanto, los coeficientes de $f(x)$ son todos iguales a los de $g(x)$.

3.º *Si el producto* f(x) · g(x) *de dos polinomios de grados* m *y* n, *respectivamente, se anula para más de* m + n *valores distintos, uno al menos de los dos polinomios es idénticamente nulo.*

Ya que cada uno de dichos valores anula a $f(x)$ o a $g(x)$, y siendo el número de ellos mayor que $m + n$, o se anula $f(x)$ para más de m valores, o se anula $g(x)$ para más de n valores. Por tanto, uno u otro será idénticamente nulo.

167. Aplicación a la división de polinomios.

En el número 160 hemos dado reglas para la división entera de los polinomios A y B, o sea para hallar dos polinomios C y R que cumplan la condición

$$A = B \cdot C + R \qquad [4]$$

Pero ¿no existirán otros dos polinomios C' y R' que satisfagan la misma condición, o sea

$$A = B \cdot C' + R' \qquad [5]$$

siendo n el grado de B, y los de R y R' inferiores a n?

El principio de identidad contesta negativamente a esta pregunta. En efecto, de las dos igualdades [4] y [5] se deduce

$$0 = B\,(C - C') + R - R'$$

es decir

$$B\,(C - C') = R' - R$$

igualdad imposible si no son $C - C'$ y $R' - R$ idénticamente nulos. De otro modo el primer miembro sería por lo menos de grado n, y el segundo miembro sería a lo sumo de grado $n - 1$. Queda, pues, demostrada la uniformidad de la división de polinomios; se demuestra de modo análogo para las demás operaciones.

168. Método de identificación de coeficientes.

Este método constituye una de las más importantes aplicaciones del principio de identidad. Consiste en determinar polinomios, de grado y forma prefijados, que sometidos a ciertas operaciones, den un resultado dado.

Para ello se designan con letras $a, b, c, d, \ldots$, los coeficientes del polinomio desconocido y se somete éste a las operaciones expresadas. Los coeficientes del polinomio resultante se identifican con los del resultado dado, obteniéndose un sistema de ecuaciones que, si se sabe resolver, nos da los valores de $a, b, c, d, \ldots$

Así puede procederse para hallar la raíz cuadrada de un polinomio, la potencia de un binomio, etc.

EJEMPLO 1.—*Hallar*

$$\sqrt{9x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 4x + 4} \qquad [6]$$

Solución: La raíz será un polinomio de segundo grado, o sea, de la forma

$$ax^2 + bx + c \qquad [7]$$

Igualando [6] y [7] y elevando al cuadrado obtenemos

$$9x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 4x + 4 = a^2x^4 + b^2x^2 + c^2 + 2abx^3 + 2acx^2 + 2bcx$$

Identificando los coeficientes de los términos del mismo grado obtenemos el sistema

$$\left.\begin{array}{l} 9 = a^2 \\ 6 = 2ab \\ 13 = b^2 + 2ac \\ 4 = 2bc \\ 4 = c^2 \end{array}\right\} \text{ de donde } \left\{\begin{array}{l} a = \pm 3 \\ b = \pm 1 \\ c = \pm 2 \end{array}\right.$$

Hay dos raíces cuadradas, que son

$$\pm (3x^2 + x + 2)$$

EJEMPLO 2.—*Descomponer en suma de fracciones simples (denominador de primer grado) la fracción*

$$\frac{11n^2 - 23n}{2n^3 - n^2 - 18n + 9}$$

Solución: Descomponiendo el denominador, por las reglas estudiadas, en producto de factores, resulta

$$2n^3 - n^2 - 18n + 9 = (2n - 1)(n + 3)(n - 3)$$

Luego

$$\frac{11n^2 - 23n}{(2n - 1)(n + 3)(n - 3)} = \frac{a}{2n - 1} + \frac{b}{n + 3} + \frac{c}{n - 3}$$

Quitando denominadores

$$11n^2 - 23n = a(n + 3)(n - 3) + b(2n - 1)(n - 3) + c(2n - 1)(n + 3)$$

Dando a n el valor 3 en los dos miembros resulta la ecuación

$$99 - 69 = c \cdot 5 \cdot 6; \quad \text{o sea,} \quad 30 = 30c$$

de donde

$$c = 1$$

Dando a n el valor -3, sale

$$99 + 69 = b \cdot (-7)(-6); \quad \text{o sea,} \quad 168 = 42b$$

de donde

$$b = \frac{168}{42} = 4$$

Finalmente, dando a n el valor 1/2, queda

$$\frac{11}{4} - \frac{23}{2} = a \cdot \frac{7}{2} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)$$

o sea, quitando denominadores

$$11 - 46 = -35a, \qquad -35 = -35a$$

de donde

$$a = 1$$

Por tanto,

$$\frac{11n^2 - 23n}{2n^3 - n^2 - 18n + 9} = \frac{1}{2n - 1} + \frac{4}{n + 3} + \frac{1}{n - 3}$$

EJERCICIOS

1. Hallar la fracción $\frac{a}{b}$ equivalente a $\frac{399}{1064}$ y tal que la suma $a + b$ de sus términos sea igual al cubo de un número primo.

2. Determinar $\sqrt{x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x + 2}$, por el método de identificación de coeficientes, teniendo en cuenta que la raíz cuadrada no es exacta.

3. Determinar a y b de modo que $ax^4 + bx^3 + 1$ sea divisible por $(x - 1)^2$.
4. Determinar un polinomio de cuarto grado $f(x)$, cuyo primer coeficiente sea la unidad y tal que $f(x) = f(1 - x)$, $f(0) = 0$ y $f(-1) = 6$.
5. Efectuar

$$\sqrt{x^6 - 6x^5 + 13x^4 - 18x^3 + 22x^2 - 12x + 9}$$

6. Descomponer en suma de fracciones simples las fracciones

a) $\dfrac{2n + 3}{(n - 1)\, n\, (n + 2)}$ b) $\dfrac{4n - 3}{(n - 2)\, n\, (n + 3)}$

c) $\dfrac{1}{8n^3 - 2n}$ d) $\dfrac{1}{n^2\,(n + 1)}$

e) $\dfrac{1}{n^5 + 4n}$ f) $\dfrac{1}{4n^3 + 4n^2 - n - 1}$

g) $\dfrac{1}{2n\,(2n + 1)\,(2n + 2)}$ h) $\dfrac{1}{(4n - 3)\,(4n - 1)}$

i) $\dfrac{1}{2n^2 - n}$ j) $\dfrac{1}{(4n^2 - 1)^2}$

7. Hallar qué valores han de tomar los coeficientes a, b y c para que las tres raíces del polinomio $x^3 - ax^2 + bx + c = 0$ sean precisamente a, b y c.
8. En el polinomio $4x^4 - 8x^3 + 4x^2 - 4\,(p + 1)\,x + (p + 1)^2$, determinar el valor de p para que sea un cuadrado perfecto de un polinomio entero en x.
9. ¿Qué valor han de tomar los coeficientes n y p para que sea un cubo perfecto la expresión $x^3 + 3x^2 + nx + p$.
10. Determinar n de modo que el polinomio $125x^3 - 7x^2 + 8x + n$ sea divisible por $5x - 1$.
11. Encontrar un polinomio de tercer grado tal que para $x = 3$, $y = 24$; para $x = 2$, $y = -4$; para $x = -1$, $y = 8$, y para $x = 1$, $y = 0$. Determinar todos los valores de x para los cuales el polinomio se anula.
12. Determinar m y n de modo que el polinomio $9x^4 - 3x^3 + 31x^2 + mx + n$ sea cuadrado perfecto.
13. Dado el polinomio $x^4 - x^3 + x^2 + ax + b$: 1.º, determinar a y b de modo que se anule para $x = 1$ y para $x = 2$; 2.º, sustituyendo a y b por los valores obtenidos, resolver la ecuación que resulte al igualar a cero dicho polinomio; 3.º, calcular el producto de todas las raíces obtenidas y la suma de los productos que pueden formarse con dichas raíces, tomadas tres a tres.
14. Hallar a y b en el polinomio $3x^4 - 2x^3 - 5x^2 + ax + b$ para que sea divisible por $x - 2$ y el polinomio cociente tenga por término independiente 4.

15. Descomponer en suma de fracciones simples:

a) $\dfrac{7n^2 + 3n - 12}{n^3 - 7n - 6}$

b) $\dfrac{3n^2 + 10n + 4}{n^3 + 3n^2 + 2n}$

16. ¿Para qué valores de m se puede descomponer la expresión $y^2 + 2xy + 2x + my - 3$ en un producto de dos factores que sean polinomios enteros?

17. Hallar la raíz cuadrada del polinomio $25x^4 - 20x^3 + 94x^2 - 36x + 81$, sabiendo que es un cuadrado perfecto.

18. Encontrar los números a, b y c tales que se tenga

$$\frac{11x^2 - 23x}{(2x - 1)(x + 3)(x - 3)} = \frac{a}{x - 1/2} + \frac{b}{x + 3} + \frac{c}{x - 3}$$

19. Determinar los valores de los parámetros a y b para que el polinomio

$$x^3 + 5x^2 + ax + b$$

sea divisible por $x - 3$, y también por el cuadrado perfecto $(x + m)^2$, para cierto valor de m que se calculará también.

20. Descomponer en suma de fracciones simples la fracción algebraica

$$F(x) = \frac{3x^2 + nx + 11}{(x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)}$$

en la que n es el número de divisores de 54000.

15

DIVISIBILIDAD DE POLINOMIOS CON UNA VARIABLE

169. Definiciones y propiedades.

Una expresión entera P(x) *es divisible por otra* Q(x) *cuando existe una tercera* R(x) *que cumple la condición*

$$P(x) \equiv Q(x) \cdot R(x) \qquad [1]$$

Entonces se dice que $P(x)$ es *múltiplo* de $Q(x)$, y que éste es *factor* o *divisor* de aquél.

De esta definición, análoga a la de la divisibilidad numérica, resultan, del mismo modo que allí (núm. 68), las propiedades siguientes:

1.º *Si* Q(x) *es divisor de* P(x), *lo es también de* P(x) · L(x), *cualquiera que sea la expresión entera* L(x).

2.º *Si* Q(x) *es divisor de* P(x) *y de* L(x), *lo será igualmente de su suma* P(x) + L(x) *y de su diferencia* P(x) — L(x).

Hay, no obstante, algunas diferencias entre la divisibilidad numérica y la algebraica. Por ejemplo, se verifican las propiedades siguientes:

1.ª *Toda expresión entera* P(x) *es divisible por cualquier constante* C, *no nula.*

En efecto, $P(x) : C$ será otra expresión entera, y tendremos:

$$P(x) \equiv C \cdot [P(x) : C]$$

con lo que se cumplirá la definición [1].

2.ª *Si una expresión entera* P(x) *es divisible por otra* Q(x), *también lo es por* C · Q(x), *siendo* C *una constante.*

En efecto, de la hipótesis

$$P(x) = Q(x) \cdot R(x)$$

se deduce:

$$P(x) = C \cdot Q(x) \cdot [R(x) : C]$$

y es evidente que $R(x) : C$ es otra expresión entera.

Esto nos indica que las constantes, o expresiones enteras de grado cero, desempeñan en la divisibilidad algebraica el mismo papel que la unidad en la divisibilidad numérica. Así, pues, consideraremos como una misma dos expresiones algebraicas si sólo difieren en un factor constante.

170. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de polinomios.

Máximo común divisor de dos o más expresiones enteras es la expresión entera de mayor grado que sea divisor común de aquéllas.

Mínimo común múltiplo de dos o más expresiones enteras es la expresión entera de menor grado que es múltiplo común de aquéllas.

171. Divisibilidad de monomios.

Un monomio sólo puede admitir divisores monomios, pues el producto de polinomios, o de un monomio por un polinomio, da origen a un polinomio.

Se sabe, por otra parte, que *la condición necesaria y suficiente para que un monomio sea divisible por otro es que contenga todas las letras de éste con exponentes iguales o mayores.* Por tanto, las reglas para hallar el m. c. d. y el m. c. m. de monomios son las mismas que para el caso de números descompuestos en sus factores primos.

EJEMPLO.—*Sean los monomios*

$$3x^3y^2z; \qquad 7x^5yz^2; \qquad 5x^2y^2z^3$$

Será:

$$\text{m. c. d.} = Cx^2yz$$
$$\text{m. c. m.} = Cx^5y^2z^3$$

siendo C una constante arbitraria.

172. Máximo común divisor de dos polinomios.

Su obtención se funda en estos dos principios, análogos a los de la divisibilidad numérica y que se demuestran también del mismo modo que allí:

1.º *Si el polinomio* Q(x) *es divisor de* P(x), *se verifica que*

$$\text{m. c. d. } [P(x), Q(x)] = Q(x)$$

2.º *Si* R(x) *es el resto de la división de* P(x) *por* Q(x), *se verifica que*

$$\text{m. c. d. } [P(x), Q(x)] = \text{m. c. d. } [Q(x), R(x)]$$

Por tanto, el m. c. d. de dos polinomios se determina fácilmente por el algoritmo de Euclides mediante divisiones sucesivas. El último divisor empleado que hace exacta la división será el m. c. d. buscado.

Como la multiplicación de un dividendo por una constante no produce otra alteración en el resto que multiplicarlo por dicha constante, y como en el algoritmo de Euclides sólo interesan los restos de las divisiones, resulta que se puede multiplicar cualquier dividendo parcial por el número conveniente para evitar coeficientes fraccionarios en el cociente. Lo mismo puede dividirse cualquier dividendo parcial por un número conveniente.

EJEMPLO.—*Hallar el máximo común divisor de los polinomios* $x^4 - 5x^2 + 4$ *y* $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$.

Solución: Los cálculos se disponen así:

	$x - 3$	$x + 3$
$x^4 \quad -5x^2 \quad +4$	$x^3 + 3x^2 - 4x - 12$	$x^2 - 4$
$-x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 12x$	$-x^3 \quad +4x$	
$-3x^3 - x^2 + 12x + 4$	$3x^2 \quad -12$	
$+3x^3 + 9x^2 - 12x - 36$	$-3x^2 \quad +12$	
$8x^2 - 32$	0	

Luego el máximo común divisor es $C\ (x^2 - 4)$.

EJERCICIOS

1. Hallar el máximo común divisor de los polinomios:

   a) $2x^3 - 5x^2 + 4x - 4$; $2x^3 - 3x^2 + 3x - 2$.
   b) $3x^3 + x^2 - 8x + 4$; $3x^3 + 7x^2 - 4$.
   c) $x^5 + 4x^4 + 4x^3 - x^2 - 18x + 4$; $x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 14x - 4$.
   d) $2x^3 - 2x^2 - 2x - 4$; $2x^2 + x - 10$.
   e) $x^3 - 10x^2 + 31x - 30$; $x^3 - 5x^2 - 4x + 20$.
   f) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x - 14$; $x^3 - 5x^2 + 6x - 12$.

2. Simplificar las expresiones:

$$\text{a)}\ \frac{x^4 + 8x^3 - 7x^2 - 3x + 1}{x^4 + 11x^3 + 25x^2 - 18x - 19}$$

$$\text{b)}\ \frac{x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 2x + 2}{x^5 - x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 5x - 6}$$

$$\text{c)}\ \frac{3x^5 - 10x^3 + 15x + 8}{2x^5 - 4x^4 - 12x^3 + 8x^2 + 26x + 12}$$

3. Hallar el máximo común divisor de los términos de la fracción:

$$\frac{x^7 + x^4 - x^2 + x + 1}{x^6 - x^5 + x^4 + x^3 - x^2 + x + 1}$$

simplificarla y hallar los valores de x para los que dicha fracción es igual a 1.

4. Descomponer en factores el polinomio:

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 4$$

5. Dados los polinomios

$$A(x) \equiv x^4 + x^3 - x - 1$$
$$B(x) \equiv 2x^4 + 4x^3 - 2x - 4$$

determinar los polinomios $M(x)$ y $N(x)$, de menor grado, que cumplan la identidad

$$AM + BN = 0$$

6. Calcular m. c. d. $(A, B) = D$, siendo $A \equiv x^{99} + 1$, y $B \equiv x^{45} + 1$, y encontrar dos polinomios M y N, tales que $MA + NB = D$.

7. Sean los dos polinomios:

$$P(x) = 9x^4 + 27x^3 + 30x^2 - 18x + a$$
$$Q(x) = 3x^3 + 8x^2 + 9x - 4$$

Halla el parámetro a para que el máximo común divisor de P y Q sea de segundo grado. Aplicar el resultado para hallar las raíces reales e imaginarias de las ecuaciones $P(x) = 0$ y $Q(x) = 0$.

8. Sean los determinantes

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & x \\ 1 & 9 & x^2 \end{vmatrix} \quad ; \quad D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & x^2 \\ -1 & 27 & x^3 \end{vmatrix} \quad ; \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & x \\ -1 & 27 & x^3 \end{vmatrix}$$

1.º Halla las raíces de la ecuación $D = 0$.

2.º Demuestra que D_1 y D_2 son divisibles por D, y halla las raíces de las ecuaciones $D_1 = 0$ y $D_2 = 0$.

9. Dados los polinomios

$$P(x) = x^4 + mx^3 - 2x^2 + 7x + m$$
$$Q(x) = x^2 - 4x - m$$

demuestra que se puede determinar m para que $P(x)$ sea divisible por $Q(x)$; halla dicho valor de m y resuelve la ecuación $P(x) = 0$ en tal caso.

10. a) Simplifica la fracción

$$F(x) = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 8x^3 - 7x^2 - 4x + 4}$$

sabiendo que numerador y denominador se anulan para tres valores comunes de la variable x.

b) Halla la raíz cuadrada del denominador de $F(x)$ sabiendo que es exacta.

c) Si $F_1(x)$ es la expresión irreducible de $F(x)$, haz la descomposición de $F_1(x)$ en fracciones simples.

11. Calcular a, b y c para que la expresión

$$E(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} + \frac{x^2 + bx + c}{x - 2} + \frac{x^2 + cx + a}{x - 3}$$

sea entera.

12. Determinar m y n para que las dos ecuaciones

$$(m - 1)\,x^2 + (2m + 1)\,x - 4 = 0$$
$$(n + 1)\,x^2 - (4 - 5n)\,x - 12 = 0$$

tengan las mismas raíces. Después escribir la ecuación de segundo grado que tenga por raíces las inversas de las raíces de las ecuaciones dadas.

16

DISTRIBUCIONES BIDIMENSIONALES: REGRESION LINEAL

173. Variables estadísticas bidimensionales.

En Estadística hay con frecuencia inferencias o deducciones que se basan en dos o más determinaciones realizadas en cada miembro de una muestra. Por ejemplo, podemos juzgar de la aptitud de un grupo de alumnos para el estudio de una carrera de Ciencias por las notas finales de curso habidas por ellos en las asignaturas de Matemáticas y Física. Entonces, cada alumno viene caracterizado por dos notas o variables.

El conjunto de todos los pares de valores forman una serie estadística doble, que se representa por una variable bidimensional (x, y), donde x representa el valor de la primera característica X, e y, el de la segunda Y, para cada individuo de la muestra considerada.

Llevando la característica X sobre el eje horizontal y la característica Y sobre el eje vertical, se obtienen tantos puntos como individuos se han tomado en la muestra. Al conjunto de puntos así obtenidos se llama *nube de puntos* o *diagrama de dispersión.*

EJEMPLO.—*Un grupo de 30 alumnos aprobados de 6.º curso ha obtenido las siguientes notas de Matemáticas y Física:*

TABLA 1

Matemáticas	Física	Matemáticas	Física	Matemáticas	Física
7	9	5	6	10	9
10	10	10	10	9	8
8	9	7	8	8	8
9	8	7	8	9	10
9	9	5	8	7	6
10	10	9	10	6	5
5	7	10	10	8	9
7	6	6	6	9	10
8	6	6	7	5	5
7	8	7	6	7	9

Para representar el diagrama de dispersión tomaremos (fig. 20) en el eje de abscisas las notas de Matemáticas de cada alumno, y en el eje de ordenadas, su correspondiente nota de Física.

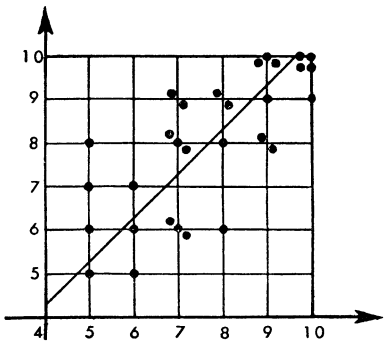


FIGURA 20

Al representar los puntos en el diagrama coinciden algunos de ellos. Hemos situado estos puntos alrededor de su posición exacta.

174. Dependencia funcional y dependencia aleatoria.

Una determinada masa de gas puede encontrarse en diversos estados, que vienen caracterizados por su *presión* (P) y su *volumen* (V), suponiendo la temperatura constante. En este caso las dos componentes P y V de la variable bidimensional (P, V) están ligadas por la conocida ley de Mariotte:

$$P \cdot V = K \qquad [1]$$

siendo K una constante. A cada valor de V le corresponde uno sólo de P; y recíprocamente, dado P se puede hallar inmediatamente el correspondiente valor de V. Se dice que existe una *dependencia funcional* entre las dos componentes P y V.

A esta clase de dependencia pertenecen las expresadas por las leyes de la Física, que vienen dadas por fórmulas matemáticas o funciones.

Representando la *nube de puntos*, aparecen todos éstos sobre una línea, que en el ejemplo considerado es una rama de hipérbola equilátera, según se sabe por la Física (fig. 21). Es la curva representación gráfica de la función considerada.

Supongamos ahora que queremos caracterizar un grupo de personas por sus pesos (x) y sus alturas (y). Es evidente que existe cierta

dependencia entre el peso y la altura de una persona: en general, a mayor altura corresponde mayor peso, y a menor peso menor al-

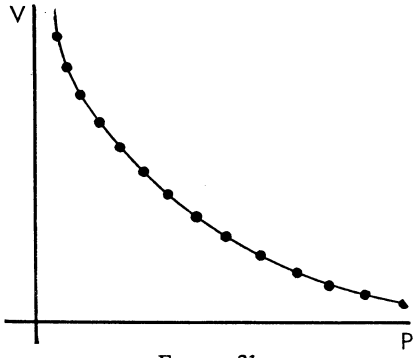


FIGURA 21

tura. Pero esta dependencia no se sabría expresar por una ley y mucho menos por una fórmula matemática. Se denomina *dependencia aleatoria.*

En este caso el conocimiento de x no nos permite conocer exactamente y, pero sí nos permite conocer algo acerca de y.

La dependencia no es tan estricta e inflexible como la dependencia funcional.

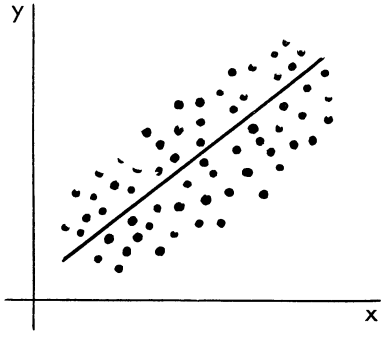


FIGURA 22

Otros ejemplos de dependencia aleatoria son la relación entre la talla de padres e hijos, entre la altura de una planta y el tiempo transcurrido desde que nació y otra multitud de fenómenos de Biología, Psicología, Economía y otras Ciencias.

Si representamos la *nube de puntos*, éstos aparecen más o menos dispersos en una región del plano (fig. 22), según que la dependencia entre x e y sea más o menos fuerte.

El problema de determinar la línea que mejor se adapta a la nube de puntos se denomina *ajuste*. Dicha línea nos daría el valor más probable de y para cada valor conocido de x.

La dependencia aleatoria es más amplia y general que la dependencia funcional propia del Análisis Matemático. Su estudio constituye hoy una necesidad para el conocimiento de fenómenos naturales a los que el concepto clásico de función resultaba inaplicable.

175. Independencia aleatoria.

Se ha estudiado durante muchos años y de muy diversas formas la dependencia que pudiera existir entre las fases de la Luna y los fenómenos meteorológicos. No se ha podido encontrar la más mínima relación entre los dos fenómenos.

Al representar la *nube de puntos*, aparecen éstos dispersos por todo el plano, indicando que los fenómenos son totalmente independientes.

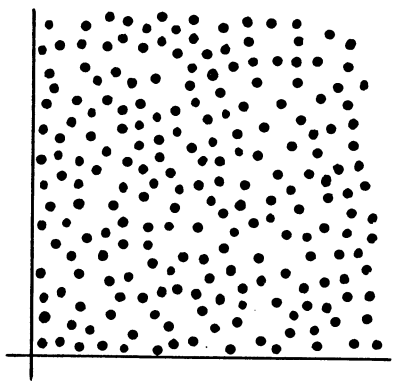


FIGURA 23

Se dice que existe una *independencia aleatoria* entre las dos componentes de la variable bidimensional.

176. Ajuste.

Ajuste es la operación de determinar la expresión matemática o línea geométrica que mejor represente la relación existente entre los

valores de la dimensión independiente con los valores de la dimensión dependiente.

En este problema pueden considerarse dos partes:

1.ª La fijación de un criterio para determinar la clase de función o curva que mejor pueda representar el fenómeno que se estudia.

2.ª El cálculo de las constantes o parámetros que determinan la función o curva que representa al fenómeno.

177. Elección de la línea.

No hay reglas fijas que permitan determinar la clase de línea que mejor se adapte o ajuste a la objetividad del fenómeno. En general, se necesita un estudio profundo del fenómeno que se desea describir mediante una ecuación matemática.

Es muy conveniente hacer la representación gráfica de los datos en un sistema de coordenadas para en una primera aproximación elegir la forma más apropiada mediante la simple inspección ocular. Y en este método sencillo conviene atender a que la línea que se quiere ajustar cumpla la condición de dejar, aproximadamente, a ambos lados un número igual de datos reales.

178. Regresión lineal.

En muchos casos la línea que mejor se adapta a una nube de puntos es una línea recta. Es el caso que estudiaremos en estas lecciones. Interesa este estudio para poder aplicar un tratamiento matemático lo más aproximado que sea posible a las series estadísticas bidimensionales.

Galton aplicó estas ideas al estudio de la relación entre las alturas de los padres y de los hijos. Para un conjunto de individuos adultos tomó como variable bidimensional su altura y la de su padre. Determinando la recta que mejor se ajustaba a la nube de puntos obtenida, halló que por cada 2,5 cm. que la altura del padre exceda (o baje) de la media de la raza, la media de las alturas de los hijos adultos excede (o baja) de la media para su sexo y generación alrededor de 1,25 cm. O sea que la altura de los hijos tiende a *regresar* hacia la media de la raza. De ahí el nombre de *recta de regresión* que dio a la que mejor se ajustaba a la nube de puntos, nombre que se ha conservado.

179. Un ejemplo sencillo.

Se sembraron 20 plantas de soja en macetas individuales, las que fueron agrupadas en el invernadero en cuatro grupos de cinco mace-

tas cada uno. Una vez que las plantas emergieron se midió la altura después de cada semana. La tabla 2 da los resultados.

TABLA 2

Semana después de la germinación	Grupo número 1	2	3	4	Altura media (en cm.)
1	4	3	6	7	5
2	18	19	18	13	17
3	26	25	24	21	24
4	38	35	28	31	33
5	44	43	39	38	41

Por la observación de la tabla y del gráfico es evidente que el crecimiento no ha sido uniforme. En las distintas semanas, los aumentos en altura fueron 5, 12, 7, 9 y 8 cm.

Aquí la primera característica, X, es el tiempo, y la segunda es Y, la altura de las plantas, y la variable bidimensional toma los valores (1; 5), 2; 17), (3; 24), (4; 33), (5; 41).

Llevando la característica X sobre el eje horizontal, y la caracte-

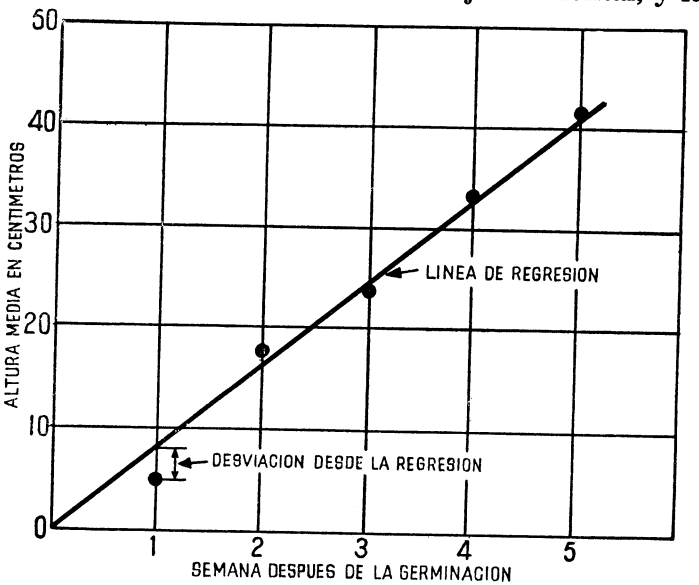


FIGURA 24

FIGURA 24.—La recta de regresión de y sobre x de los cinco puntos señalados da aproximadamente las ordenadas de los puntos, conocidas sus abscisas.

rística Y sobre el eje vertical, se obtiene la nube de puntos, que determina aproximadamente la dirección de una recta (fig. 24).

Si suponemos que ésta pasa por el origen, su ecuación será del tipo

$$y_c = bx \qquad [2]$$

Por consiguiente, $b = \frac{y}{x}$ es el aumento de altura por semana; pero como b es el *coeficiente angular de la recta,* debe ser constante. Por tanto, elijamos como valor de b la media de la razón de crecimiento, o sea,

$$b = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} \qquad [3]$$

llamado *coeficiente de regresión.* Como se indica en la tabla 3, la razón de crecimiento medio $= \frac{\Sigma yx}{\Sigma x^2} = \frac{448}{55} = 8{,}15$ cm./semana.

TABLA 3.—Cálculo de la recta de regresión que pasa por el origen

Semana x	x^2	Altura media y	xy	Estimaciones $y = 8{,}15\ x$	Desviaciones $y - y_c = d_{y \cdot x}$
1	1	5	5	8,15	— 3,75
2	4	17	34	16,30	0,70
3	9	24	72	24,45	— 0,55
4	16	33	132	32,60	0,40
5	25	41	205	40,75	0,25
15	55	120	448		

Siendo b una estimación del aumento de altura por semana, la altura media de la población en una edad dada x puede estimarse haciendo

$$y_c = bx = 8{,}15x \text{ cm.} \qquad [4]$$

Esto es lo que se conoce como *recta de regresión de* y *sobre* x. El símbolo y_c se llama *y estimado* o *y predicho* o *calculado,* para distinguirlo de *y experimental.* Si se reemplaza x por una edad, supongamos 3 semanas, el valor correspondiente

$$y_c = 8{,}15 \cdot 3 = 24{,}45 \text{ cm.}$$

es una estimación de la altura media de la población a esa edad. En la tabla se dan las estimaciones para cada fecha tabulada. Natu-

ralmente, las medias de las muestras se desvían algo respecto a las estimaciones hechas por medio de la regresión, siendo las diferencias $y - y_c$ conocidas por el nombre de *desviaciones respecto a la regresión* o *errores de estimación*. Estas diferencias se simbolizan por $d_{y \cdot x}$.

Las estimaciones de la altura pueden interpolarse entre las semanas completas, si se desea. Por ejemplo, para el día 25, x es igual a 3,57 semanas, e

$$y_c = 8{,}15 \cdot 3{,}57 = 29{,}1 \text{ cm.}$$

Puede también extrapolarse, si se supone que continúa la misma relación lineal del crecimiento. A la edad de 6 semanas, la altura es estimada como

$$y_c = 8{,}15 \cdot 6 = 48{,}9 \text{ cm.}$$

Por tanto, *la recta de regresión de* y *sobre* x es

$$y_c = bx$$

y la recta de regresión de x *sobre* y es

$$x_c = \frac{1}{b}\, y$$

180. La recta de regresión $y_c = a + bx$.

Las regresiones que pasan por el origen son poco comunes, y, por lo general, es más apropiada la ecuación $y_c = a + bx$, donde b representa la pendiente o coeficiente angular, como antes, y a es la ordenada en el origen, o sea, la ordenada del punto donde la recta corta al eje $OY(x = 0)$.

En todos los casos y métodos de ajuste lo que se persigue siempre es que las desviaciones de los valores teóricos respecto de los experimentales sean mínimas. O sea, elegida ya la función que ha de representar el fenómeno, sus parámetros se determinan de forma que el ajuste sea óptimo. Unas veces será mínima la media aritmética de las desviaciones, y otras, la suma de sus cuadrados.

El método más común de ajuste de curvas es el de los mínimos cuadrados.

181. Método de mínimos cuadrados.

Si se admite que la línea de regresión es una recta, su ecuación será del tipo:

$$y_c = a + bx \qquad [5]$$

En esta ecuación hay que determinar a y b de modo que la recta resultante sea la que mejor describe los datos.

Según el método de mínimos cuadrados, la línea que mejor se ajusta a una serie estadística es una línea para la cual la suma de los cuadrados de las desviaciones (las diferencias entre la línea y los valores reales) respecto de ella sea mínima.

En la ecuación [4] de la línea recta, y_c representa el valor calculado o teórico de y, obtenido sustituyendo los valores apropiados en la ecuación.

El problema es determinar una línea que cumpla las condiciones del *teorema de los mínimos cuadrados*, es decir, la suma de los cuadrados de las desviaciones de los valores reales respecto de los valores teóricos sea mínima.

Designemos por d la diferencia entre los valores reales y los valores teóricos. Luego hay que obtener una recta para la cual

$$\Sigma d^2 = \text{mínimo}$$

pero

$$d = y - y_c$$

Por tanto, también $(y - y_c)^2 = \text{mínimo}$.

Pero $y - y_c = y - a - bx$. Luego

$$\Sigma(y - a - bx)^2 = \text{mínimo} \qquad [6]$$

donde las incógnitas son a y b.

Para que esta expresión sea mínima, sus derivadas han de ser nulas. Derivando primero respecto a a, o sea, como si todas las letras restantes fueran constantes,

$$\frac{d\Sigma}{da} = \Sigma 2\,(y - a - bx)\,(-1) = 2\Sigma\,(-y + a + bx) = 0$$

y derivando igualmente respecto a b:

$$\frac{d\Sigma}{db} = \Sigma 2\,(y - a - bx)\,(-x) = 2\Sigma\,(-yx + ax + bx^2) = 0$$

Desarrollando los sumatorios en las dos ecuaciones, y dividiendo por 2 se tiene:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & -\Sigma y + N \cdot a + b\Sigma x = 0 \\ \text{II} & -\Sigma xy + a\Sigma x + b\Sigma x^2 = 0 \end{array}$$

o sea:

$$\begin{array}{lll} \text{I} & \Sigma y = Na + b\Sigma x & [7] \\ \text{II} & \Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2 & [8] \end{array}$$

que son las ecuaciones normales de la *recta de regresión de* y *sobre* x.

182. Recta de regresión de y sobre x.

Llamamos *recta de regresión de* y *sobre* x a la recta de ecuación $y_c = a + bx$, cuyos coeficientes se determinan de modo que $\Sigma(y - y_c)^2$ sea mínima.

Las ecuaciones normales [7] y [8] resuelven el problema.

EJEMPLO 1.—*Cinco niños de 2, 3, 5, 7 y 8 años, respectivamente, pesan 14, 20, 30, 42 y 44 kilogramos. Se pide hallar la ecuación de la recta de regresión del peso sobre la edad.*

Solución: Escribamos el cuadro de valores, designando la edad por x y el peso por y.

x	y	x^2	xy
2	14	4	28
3	20	9	60
5	30	25	150
7	42	49	294
8	44	64	352
$\Sigma x = 25$	$\Sigma y = 150$	$\Sigma x^2 = 151$	$\Sigma xy = 884$

Sustituyendo estas sumas en las ecuaciones normales [7] y [8] se tiene:

$$\left.\begin{aligned} 150 &= 5a + 25b \\ 884 &= 25a + 151b \end{aligned}\right\}$$

Resuelto este sistema, da

$$a = \frac{55}{13}, \qquad b = \frac{67}{13}$$

Luego sustituyendo en la ecuación [5] se obtiene la ecuación de regresión:

$$y_c = \frac{55}{13} + \frac{67}{13}\,x \qquad [9]$$

EJEMPLO 2.—Las notas finales de 30 alumnos en Matemáticas y Física han sido las que se indican en la tabla 1.

Si tomamos sobre el eje OX (fig. 25) las notas de Matemáticas de cada alumno, y sobre el eje OY sus correspondientes notas de Física, obtendremos la *nube de puntos* o *diagrama de dispersión*. Una simple inspección de la figura nos hace ver inmediatamente que la nube de puntos tiene un cierto rumbo o dirección y que las notas de Física son, en general, algo mejores que las de Matemáticas. Pero un estudio más exacto de la cuestión exige el cálculo de las rectas de regresión. Un método abreviado puede consistir en lo siguiente: hallemos la media aritmética de las ordenadas de todos los puntos que están situados sobre la recta $x = 5$. Es $(5 + 6 + 7 + 8) : 4 = 6{,}5$, y

lo señalamos con un aspa, poniendo su valor en la parte superior. Análogamente, para las otras ordenadas obtenemos las medias 6, 7,5, 8, 9,1 y 9,8.

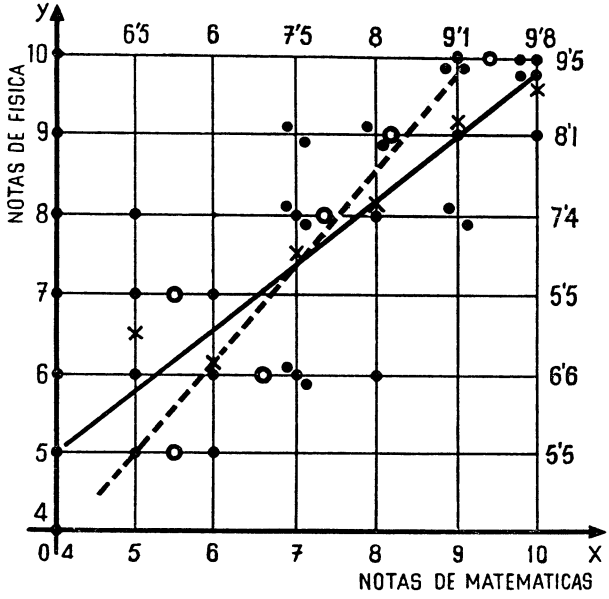


FIGURA 25.—La *recta de regresión de* y *sobre* x es la que mejor se ajusta a los puntos señalados por el aspa; la *recta de regresión de* x *sobre* y es la que mejor se ajusta a los puntos señalados por un círculo.

La *recta de regresión de* y *sobre* x, que responde a las ecuaciones normales [7] y [8] es la que más se ajusta a los puntos (5, 6,5), (6, 6,6), (7, 7,5), (8, 8), (9, 9,1) y (10, 9,8), señalados en el gráfico con un aspa. Para hallar la ecuación de esta recta aplicaremos las ecuaciones normales [7] y [8], siendo:

x	y	$x \cdot y$	x^2
5	6,5	32,5	25
6	6	36	36
7	7,5	62,5	49
8	8	64	64
9	9,1	81,9	81
10	9,8	98	100
$\Sigma x = 45$	$\Sigma y = 46{,}9$	$\Sigma xy = 364{,}9$	$\Sigma x^2 = 355$

Sustituyendo estos valores y restando a la 2.ª la 1.ª multiplicada por 7:

$$\begin{cases} 45b + 6a = 46{,}9 \\ 355b + 45a = 364{,}9 \end{cases} \quad \text{o sea} \quad \begin{cases} 45b + 6a = 46{,}9 \\ 40b + 3a = 36{,}6 \end{cases}$$

Restando a la 1.ª la 2.ª multiplicada por 2, sale

$$35b = 26{,}3 \quad ; \quad b = 0{,}75$$
$$6a = 13{,}1 \quad ; \quad a = 2{,}19$$

Por tanto, la ecuación de la *recta de regresión de* y *sobre* x es:

$$y_c = 0{,}75x + 2{,}19 \qquad [10]$$

183. Recta de regresión de x sobre y.

Si buscamos la recta de ecuación $x_c = b'y + a'$ tal que $\Sigma(x - x_c)^2$ resulte mínima, se obtiene una recta distinta de la anterior, y denominada recta de regresión de x sobre y.

La ecuación de tal recta de regresión de x sobre y será de la forma

$$x_c = b'y + a'$$

y se hace que la desviación cuadrática entre ella y las x de los puntos sea mínima, o sea que

$$\Sigma(b'y + a' - x)^2 = \text{mínima}$$

Para ello se deriva como en el número 180, y se hallan las ecuaciones:

$$b'\Sigma y + N \cdot a' = \Sigma x \qquad [11]$$
$$b'\Sigma y^2 + a'\Sigma y = \Sigma xy \qquad [12]$$

que son las ecuaciones normales de la *recta de regresión* de y sobre x.

Con el fin de abreviar los cálculos, operando análogamente a como se hizo en el ejemplo 2 del número anterior con las rectas coordenadas de abscisas se obtienen las medias 5,5, 6,6, 5,5, 7,4, 8,1, 9,5. Se llama *recta de regresión de* x *sobre* y, la que mejor se ajusta a los puntos (5,5, 5), (6,6, 6), (5,5, 7), (7,4, 8), (8,1, 9) y (9,5, 10), que en la figura 25 se han señalado con un circulito, poniendo a derecha los valores correspondientes.

Los sumatorios se determinarán como antes:

y	x	yx	y^2
5	5,5	27,5	25
6	6,6	39,6	36
7	5,5	38,5	49
8	7,4	59,2	64
9	8,1	72,9	81
10	9,5	95	100
$\Sigma y = 45$	$\Sigma x = 42{,}6$	$\Sigma yx = 322{,}7$	$\Sigma y^2 = 355$

Sustituyendo estos valores en [11] y [12], y restando a la 2.ª la 1.ª multiplicada por 7:

$$\begin{cases} 45b' + 6a' = 42{,}6 \\ 355b' + 45a' = 322{,}7 \end{cases} \quad \text{o sea} \quad \begin{cases} 45b' + 6a' = 42{,}6 \\ 40b' + 3a' = 34{,}5 \end{cases}$$

Restando a la 1.ª la 2.ª multiplicada por 2:

$$35b' = 26{,}4; \quad b' = 0{,}75$$
$$3a' = 4{,}5; \quad a' = 1{,}5$$

Luego la ecuación de la recta de regresión de x sobre y es

$$x_o = 0{,}75y + 1{,}5$$

184. Cálculo general abreviado de las rectas de regresión.

En el diagrama de dispersión hagamos la traslación de los ejes al punto $O'(\bar{x}, \bar{y})$, siendo $\bar{x}$ la media de las abscisas de todos los puntos, e y, la de sus ordenadas. O sea, tomamos el nuevo origen en O', de modo que los nuevos ejes $O'X'$ y $O'Y'$ sean paralelos a los antiguos (fig. 26).

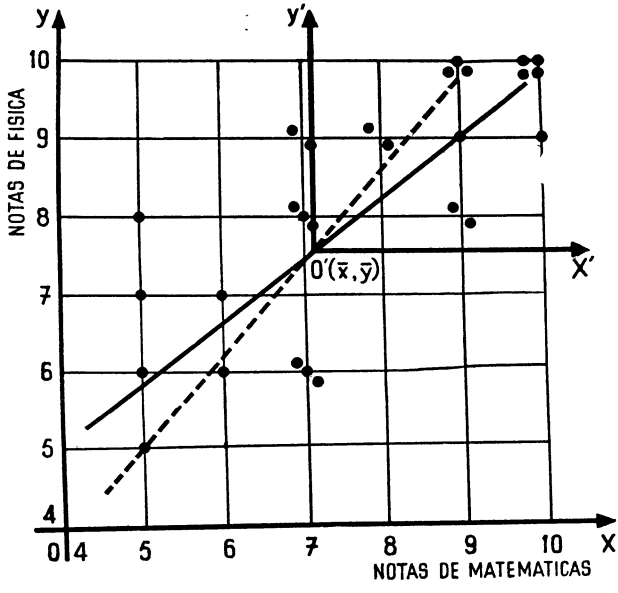


FIGURA 26.—Las rectas de regresión pasan por el centro de gravedad O' $(x, \bar{y})$ de la nube de puntos.

Las coordenadas de los puntos del diagrama respecto a los nuevos ejes serán:

$$x' = x - \overline{x}$$
$$y' = y - \overline{y}$$

La ecuación de la recta de regresión de y respecto a x será:

$$y'_c = bx' + a$$

con la condición

$$\Sigma(bx' + a - y')^2 = \text{mínima}$$

Derivando respecto a a y b, como en el número 180, obtiénense las ecuaciones

$$\begin{cases} b\Sigma x' + N \cdot a = \Sigma y' \\ b\Sigma x'^2 + a\Sigma x' = \Sigma x'y' \end{cases}$$

Pero $\Sigma x' = \Sigma y' = 0$, por ser suma de desviaciones respecto a la media aritmética. Luego queda:

$$\begin{cases} Na = 0 \\ b\Sigma x'^2 = \Sigma x'y' \end{cases} \qquad \text{de donde} \qquad \begin{cases} a = 0 \\ b = \dfrac{\Sigma x'y'}{\Sigma x'^2} \end{cases}$$

lo que indica que la recta de regresión pasa por el nuevo origen, es decir, por el punto $(\overline{x}, \overline{y})$. Su ecuación es:

$$y'_c = \frac{\Sigma x'y'}{\Sigma x'^2}\, x'$$

y referida a los ejes antiguos:

$$y_c - \overline{y} = \frac{\Sigma x'y'}{\Sigma y'^2}\,(x - \overline{x}) \qquad [13]$$

Obsérvese que a tiene el mismo valor que anteriormente. Análogamente para la otra recta de regresión:

$$\begin{cases} a' = 0 \\ b' = \dfrac{\Sigma x'y'}{\Sigma y'^2} \end{cases}$$

y su ecuación es

$$y'_c = \frac{\Sigma x'y'}{\Sigma y'^2}\, y'$$

o sea, referida a los ejes antiguos:

$$x_c - x = \frac{\Sigma x'y'}{\Sigma y'^2}(y - \overline{y}) \qquad [14]$$

EJEMPLO.—*Un grupo de 12 alumnos aprobados han obtenido las siguientes calificaciones en Matemáticas (x) y Física (y):*

x	5	6	6	6	7	7	7	8	8	9	9	10
y	6	6	7	8	7	7	9	8	10	9	10	9

Calcular la recta de regresión de y *sobre* x.

Solución: Formaremos el siguiente cuadro:

x	y	x'	y'	$x'y'$	x'^2
5	6	—7/3	—2	14/3	49/9
6	6	—4/3	—2	8/3	16/9
6	7	—4/3	—1	4/3	16/9
6	8	—4/3	0	0	16/9
7	7	—1/3	—1	1/3	1/9
7	7	—1/3	—1	1/3	1/9
7	9	—1/3	1	—1/3	1/9
8	8	2/3	0	0	4/9
8	10	2/3	2	4/3	4/9
9	9	5/3	1	5/3	25/9
9	10	5/3	2	10/3	25/9
10	9	8/3	1	8/3	64/9
$\Sigma x = 88$	$\Sigma y = 96$				
$\overline{x} = 22/3$	$\overline{y} = 8$	$\Sigma x' = 0$	$\Sigma y' = 0$	$\Sigma x'y' = \frac{54}{3}$	$\Sigma x'^2 = \frac{222}{9}$

Aplicando el método general, ecuaciones normales [7] y [8], se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} 12a + 88b &= 96 \\ 88a + 670b &= 722 \end{aligned}\right\} \quad a = \frac{98}{37}, \quad b = \frac{27}{37}$$

Aplicando el método abreviado, fórmula [13], resulta

$$y_c - 8 = \frac{54/3}{222/9}\left(x - \frac{22}{3}\right) = \frac{27}{37}\left(x - \frac{22}{3}\right) = \frac{27}{37}x - \frac{198}{37}$$

$$y_c = \frac{27}{37}x + 8 - \frac{198}{37} = \frac{27}{37}x + \frac{98}{37}$$

Se obtiene el mismo resultado con los dos métodos.

EJERCICIOS

1. En un grupo de 12 árboles se han obtenido los resultados que se indican en el cuadro siguiente:

Número de frutas, x (cientos) ...	15	15	12	26	18	12	8	38	26	19	29	22
Porcentaje de frutas dañadas, y	52	46	38	37	37	37	34	25	22	22	20	14

Calcula las dos rectas de regresión por el método abreviado.

2. Partiendo de los datos sobre 98 lotes de 6 terneras cada uno, se obtuvieron los siguientes resultados:

Variable	Símbolo	Media	Varianza	Covarianza
Kilos de alimento consumido por lote	x	4.669,0	899,557	
Aumento en el peso por lote, en kilos	y	1.180,7	39,482	178,959

Calcula la ecuación de regresión de y sobre x, sabiendo que varianza $=$ $= \frac{\Sigma x'^2}{N} = 899{,}557$; $\frac{\Sigma y'^2}{N} = 39{,}482$, covarianza $= \frac{\Sigma x'y'}{N}$.

3. En los lotes de terneras del ejemplo anterior, el lote A consumió 6.863 kilos de alimento y aumentó 1.612 kg.; en cambio, el lote B, con 3.688 kilos de alimento, aumentó 996 kg. ¿Los aumentos de peso de estos dos lotes están de acuerdo con el aumento de peso esperado? Representa gráficamente la ecuación de regresión y señala los puntos para A y B.

4. En el lote C de las terneras, $x = 6.426$ e $y = 1.380$ kg. En el lote D, $x = 4.846$ e $y = 1.362$ kg. Calcula los errores de estimación para estos lotes. Señala en el gráfico los puntos correspondientes a C y D, y observa la interpretación gráfica de esta diferencia.

5. Los pesos y alturas de 12 alumnos varones de Preuniversitario son los siguientes:

Pesos, X (kg.)	70	63	72	60	66	70	74	65	62	67	65	68
Alturas, Y (cm.) ...	155	150	180	135	156	168	178	160	132	145	139	152

a) Dibuja el diagrama de dispersión de los datos.

b) Calcula las dos rectas de regresión, y dibújalas.

c) Estima el peso de un estudiante que mide 168 cm. de altura, y la altura de otro que pesa 63 kg.

6. La producción de acero en Estados Unidos, en millones de toneladas, fue durante el período 1946-1956 la indicada en la tabla adjunta.

Año	Producción de acero
1946	66,6
1947	84,9
1948	88,6
1949	78,0
1950	96,8
1951	105,2
1952	92,2
1953	111,6
1954	88,3
1955	117,0
1956	115,2

a) Representa el diagrama de dispersión.

b) Halla la ecuación de la recta que más se aproxima a los datos (regresión de y sobre x) tomando como año cero el año central 1951.

c) Estima la producción de acero en 1944 y en 1957.

7. Se dan las siguientes medidas de las alturas de las plantas de soja, en el campo:

Edad en semanas	1	2	3	4	5	6	7
Altura en centímetros	5	13	16	23	33	38	40

Calcula la ecuación de la recta de regresión por el método abreviado. Haz un gráfico con los datos y traza la recta. Calcula las desviaciones desde la regresión.

8. Los valores siguientes son pesadas de un pollito, hechas en días alternados:

Día, x	2	4	6	8	10	12	14
Peso, y	4	2	5	9	8	11	8

Calcula la recta de regresión de y sobre x, por el método abreviado. Haz un gráfico con los datos.

9. En la tabla siguiente se dan los pesos del cuerpo y de la cresta de pollos White Legorn de 15 días de edad.

Número del pollo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Peso del cuerpo (g.), x	83	72	69	90	90	95	95	91	75	70
Peso de la cresta (mg.), y ...	56	42	18	84	56	107	90	68	31	48

Calcula la recta de regresión de y sobre x.

10. En el ejercicio anterior, calcula la suma de los cuadrados de las desviaciones desde la regresión.

¿Cuál es el peso de la cresta que se desvía más de la regresión?

11. Construye el gráfico con los datos de los pollos, disponiendo el peso del cuerpo en el eje vertical. Traza la recta de regresión. Comprueba si las desviaciones respecto de la regresión corresponden a los valores calculados.

17

CORRELACION LINEAL

185. Correlación.

Es la relación de dependencia que existe entre los valores de dos o más variables aleatorias.

Así, en el ejemplo del número 173 es evidente que existe una cierta relación entre las notas de Matemáticas y de Física de los 30 alumnos, pues, en general, los buenos alumnos que tienen una nota elevada en Matemáticas, también la tienen en Física. Esta relación, sin embargo, no es tan estricta como la que expresan las funciones matemáticas, en que dado el valor de una variable, queda perfectamente determinado el de la otra variable.

Si al trazar el diagrama de dispersión se encontrara que todos los puntos estaban en una recta o curva, es evidente que entonces la correlación sería *perfecta,* y vendría expresada exactamente por una función matemática. Así, en la figura 27 se han dibujado los puntos que representa la renta de los títulos de la Deuda en relación con el cambio de los mismos.

Pero según sea más o menos imperfecta la correlación entre las dos variables, los puntos se separarán más o menos de la recta o curva, produciéndose una dispersión. Si hay un alto grado de correlación entre las dos variables, la nube de puntos quedará confinada a una banda estrecha, y las dos rectas de regresión estarán muy próximas una a otra. En adelante consideramos exclusivamente el caso de que la correlación sea lineal. Cuando la correlación sea menos perfecta, la dispersión de los puntos será mayor, la banda en que están situados será más ancha y las rectas de regresión estarán más separadas.

En el caso extremo en que la correlación sea nula, o sea las dos variables no tengan ninguna relación una con otra, los puntos estarán distribuidos al azar por toda una región del plano, y la recta de regresión de y sobre x será aproximadamente paralela al eje OX,

pues la media de las ordenadas de todos los puntos situados sobre la misma paralela al eje *OY* caerá aproximadamente hacia la mitad de la región del plano. Del mismo modo la recta de regresión de x sobre y será aproximadamente paralela al eje *OY*, pues la media aritmética de las abscisas situadas en la misma paralela al eje *OX*

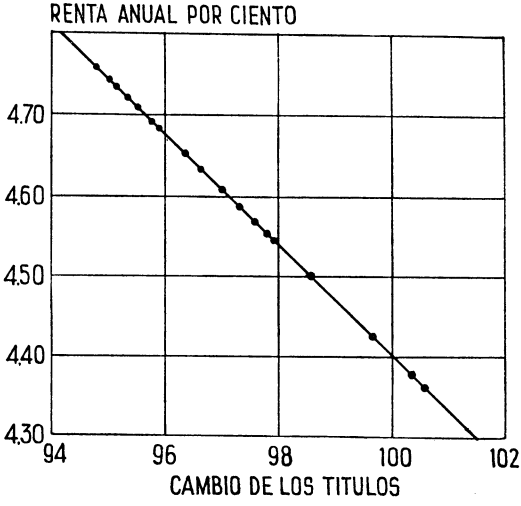


FIGURA 27.—La gráfica que da la relación entre la renta anual y el cambio de los títulos es una línea recta: ésta indica que hay una proporcionalidad inversa entre una y otra.

es aproximadamente el punto medio de la región rectangular considerada. Por tanto, las dos rectas de regresión forman ahora ángulo de 90°.

Luego, cuanto menor es el ángulo que forman las rectas de regresión más perfecta es la correlación lineal.

186. Coeficiente de correlación lineal.

Es del mayor interés medir el grado de correlación entre dos variables por medio de un coeficiente abstracto, esto es, independiente de las unidades adoptadas. Se define así:

Coeficiente de correlación r *entre dos variables aleatorias es la media geométrica de los coeficientes* b *y* b′ *de las rectas de regresión del diagrama de dispersión de dichas variables,* o sea

$$r = \sqrt{b \cdot b'} \qquad [1]$$

Las líneas que siguen intentan explicar las razones a que obedece esta definición.

El coeficiente b es la pendiente de la recta de regresión de y sobre x, $y_c = bx + a$, o sea, llamando α la inclinación de dicha recta,

$$b = \operatorname{tg} \alpha$$

El coeficiente b' es el inverso de la pendiente de la recta de regresión de x sobre y, $x_c = b'y + a'$, o sea, llamando α' la inclinación de dicha recta:

$$b' = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha'}$$

Por tanto,

$$b \cdot b' = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha'}$$

Pero de la construcción de las rectas de regresión se deduce que $\alpha' \geqslant \alpha$, luego $b \cdot b' \leqslant 1$. El valor máximo de r tiene lugar, por tanto, cuando $\alpha = \alpha'$, o sea, las dos rectas de regresión coinciden. Entonces

$$r = \sqrt{1} = \pm 1$$

A medida que el ángulo de las rectas de regresión aumenta, el cociente $\operatorname{tg} \alpha / \operatorname{tg} \alpha'$ disminuye, y por tanto r. En el caso extremo en que la correlación sea nula, es $\alpha = 0$, $\alpha' = 90°$. Luego

$$b \cdot b' = \frac{\operatorname{tg} 0°}{\operatorname{tg} 90°} = \frac{0}{\infty} = 0 \quad ; \quad r = 0$$

El coeficiente de correlación r varía, por tanto, entre 0 y 1, y es una medida adecuada de la correlación lineal.

EJEMPLO.—En el caso de los números 182 y 183 es:

$$r = \sqrt{0{,}75 \cdot 0{,}75} = 0{,}75$$

187. Correlación directa e inversa.

Si los coeficientes de regresión son positivos y, por tanto, las rectas de regresión son crecientes, la correlación se llama *directa* o *positiva*, y se le atribuye a r signo +; o sea, $r > 0$.

Si los coeficientes de regresión b y b' son negativos, o sea, al aumentar x disminuye el valor de y sobre las rectas de regresión, la correlación se llama *inversa* o *negativa*, y se da a r signo —, o sea $r < 0$.

188. Cálculo general del coeficiente de correlación.

Según el número 184, es:

$$b = \frac{\Sigma x'y'}{\Sigma x'^2} \quad \text{y} \quad b' = \frac{\Sigma x'y'}{\Sigma y'^2}$$

siendo $x' = x - \overline{x}$, e $y' = y - \overline{y}$. Luego sustituyendo en [1]

$$r = \sqrt{\frac{\Sigma x'y'}{\Sigma x'^2} \cdot \frac{\Sigma x'y'}{\Sigma y'^2}} = \frac{\Sigma x'y'}{\sqrt{\Sigma x'^2 \cdot \Sigma y'^2}} =$$

$$= \frac{\Sigma x'y'}{N\sqrt{\frac{\Sigma x'^2}{N} \cdot \frac{\Sigma y'^2}{N}}} = \frac{\Sigma x'y'}{N \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y} \qquad [2]$$

ya que por definición la desviación típica

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma x'^2}{N}} \quad \text{y} \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma y'^2}{N}}$$

EJEMPLO.—Se han hallado la velocidad media y la distancia a la Tierra de 10 nebulosas, tal como se indica en la siguiente tabla:

x	6	9	24	38	46	48	52	75	118	196
y	1,2	1,8	3,3	7,2	7	9,1	11	14,5	22,9	36,3

La variable x representa la velocidad media en cientos de Km/s., y la variable y, la distancia a la Tierra en millones de parsecs. El parsec equivale a 3,6 años-luz, o sea, es la distancia a la cual se ve el diámetro de la órbita terrestre bajo un ángulo de 1'.

La simple inspección de la tabla permite ver que hay una fuerte correlación entre distancia y velocidad: cuanto mayor es una, mayor es la otra. Tratamos de hallar el coeficiente de correlación. Los cálculos se indican en la tabla 5. De ella se deduce que

$$r = \frac{\Sigma x'y'}{\sqrt{\Sigma x'^2 \cdot \Sigma y'^2}} = \frac{5\,599{,}6}{\sqrt{29\,390 \cdot 1\,058{,}26}} = 0{,}9967$$

TABLA 5.—Cálculo del coeficiente de correlación entre la velocidad, en cientos de Km/s., y la distancia a la Tierra, en millones de parsecs, de 10 nebulosas

x	y	x'	y'	$x'y'$	x'^2	y'^2
6	1,2	55	10,2	561	3.025	104,04
9	1,8	52	9,6	499,2	2.704	92,16
24	3,3	37	8,1	299,7	1.369	65,61
38	7,2	23	4,2	96,6	529	17,64
46	7	15	4,4	66	225	19,36
48	9,1	13	2,3	29,9	169	5,29
52	11	9	0,4	3,6	81	0,16
75	14,4	— 14	— 3,0	42	169	9,00
117	22,8	— 56	— 11,4	638,4	3.136	129,96
195	36,2	— 134	— 24,8	3.323,2	17.956	615,04
610	114	0	0	5.559,6	29.390	1.058,26
$\bar{x} = 61$	$\bar{y} = 11,4$					

EJERCICIOS

1. Calcula r para los siguientes pares:

   x: 1, 2, 3, 4, 5.
   y: 3, 5, 7, 9, 11.

   Representa los datos en un gráfico semejante al de la figura 28 con las rectas y sobre x, y x sobre y.

2. Halla el coeficiente r en los pares:

   x: 2, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 18, 20.
   y: 1, 2, 2, 3, 3, 4, 3, 4, 4, 5.

   Marca la banda elíptica de los puntos.

3. Calcula r en los siguientes pares:

   x: 3, 5, 8, 11, 12, 12, 17.
   y: 11, 5, 6, 8, 7, 18, 9.

   Observa en el diagrama la dispersión de los puntos.

4. En los datos del ejercicio 8 de la lección anterior, calcula r.

5. En los seis ejercicios siguientes se da, además de las dos series de datos de cada uno, también el valor de r, y además las rectas de regresión de

y sobre x, y de x sobre y. Se pide hallar las ecuaciones de dichas rectas (fig. 28):

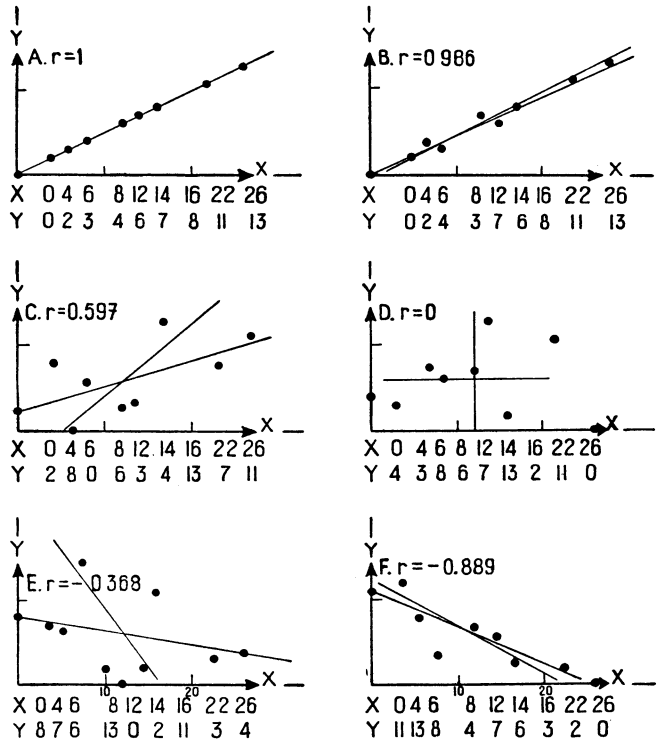


FIGURA 28

A. x: 0, 4, 6, 8, 12, 14, 16, 22, 26
y: 0, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 13 } $r = 1$

B. x: 0, 4, 6, 8, 12, 14, 16, 22, 26
y: 0, 2, 4, 3, 7, 6, 8, 11, 13 } $r = 0{,}986$

C. x: 0, 4, 6, 8, 12 14, 16, 22, 26
y: 2, 8, 0, 6, 3, 4, 13, 7, 11 } $r = 0{,}597$

D. x: 0, 4, 6, 8, 12 14, 16, 22 26
y: 4, 3, 8, 6, 7, 13, 2, 11, 0 } $r = 0$

E. x: 0, 4, 6, 8, 12 14, 16, 22, 26
y: 8, 7, 6, 13, 0, 2, 11, 3, 4 } $r = -0{,}368$

F. x: 0, 4, 6, 8, 12 14, 16, 22, 26
y: 11, 13, 8, 4, 7, 6, 3, 2, 0 } $r = -0\,889$

6. Treinta estudiantes tuvieron las siguientes puntuaciones en dos exámenes de matemáticas:

I: 73 41 83 71 39 60 51 41 85 88 44 71 52 74 50
42 85 53 85 44 66 60 33 43 76 51 57 25 40 76
II: 29 24 34 27 24 26 35 18 33 39 27 35 25 29 13
13 40 23 40 22 25 21 26 19 29 25 19 17 17 35 } Calcula r

7. Si $y = a + x$, siendo a constante, demuestra que $\overline{y} = a + \overline{x}$ y $\Sigma y'^2 = \Sigma x'^2$.

8. Si $y = bx$, siendo b una constante, demuestra que $\overline{y} = b\overline{x}$ y que $\Sigma y'^2 = b^2\Sigma x'^2$. Ten en cuenta que b puede ser una fracción.

9. Si $y = a + bx$, demuestra que $\overline{y} = a + b\overline{x}$, y $\Sigma y'^2 = b^2\Sigma x'^2$.

10. Después de resolver los tres ejercicios anteriores, demuestra que si $x_1 = a + bx$ e $y_1 = c + dy$, entonces será $r_{x_1, y_1} = \pm r_{x, y}$.

11. Las alturas (en pulgadas) de 12 padres y las de sus hijos primogénitos (y) están representadas en la tabla siguiente:

Padres (x)	65	63	67	64	68	62	70	66	68	67	69	71
Hijos (y)	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70

a) Representa el diagrama de dispersión.
b) Determina las rectas de regresión de y sobre x y de x sobre y.
c) Halla el coeficiente de correlación entre las dos variables.

II.— Geometría y Trigonometría

18

LAS TRASLACIONES EN EL PLANO

189. Definición de vector.

Vector es un segmento cuyos extremos se dan en un cierto orden. Al primero se le llama *origen* y al segundo *extremo* del vector. Para distinguir gráficamente este último, se acostumbra a ponerle una punta de flecha.

Al vector de origen M y extremo N lo representaremos por $\overrightarrow{MN}$. A la longitud del segmento MN se denomina *módulo* del vector $\overrightarrow{MN}$.

Dirección de un vector $\overrightarrow{MN}$ es la de la recta MN. Todas las rectas paralelas entre sí se dice que tienen la misma dirección. Así, pues, una recta define una dirección.

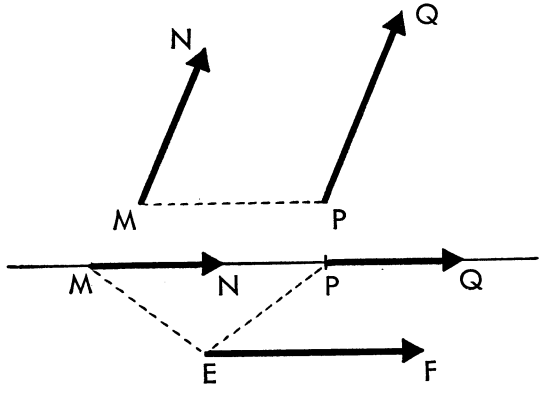


FIGURA 29

Dos vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{PQ}$, situados en rectas distintas, tienen el mismo *sentido* cuando tienen la misma dirección y ambos se en-

cuentran en el mismo semiplano respecto de la recta MP. Si los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{PQ}$ están situados en la misma recta, se dice que tienen el mismo *sentido* cuando tienen el mismo sentido que otro vector EF, no situado en la misma recta (fig. 29).

Un vector viene caracterizado por su *origen, módulo, dirección* y *sentido.*

190. Equipotencia de vectores.

Dos vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{PQ}$, situados en rectas distintas, se dice que son *equipolentes* cuando el cuadrilátero $MPQN$ es un paralelogramo.

Dos vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{EF}$, situados en la misma recta, se dice que son *equipolentes* cuando tienen el mismo módulo y el mismo sentido (fig. 30).

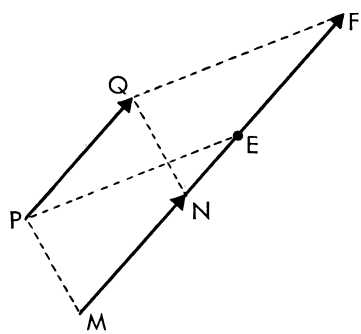


FIGURA 30

Por tanto, $EPQF$ es también un paralelogramo.

Expresaremos así:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{EF}$$

Es fácil demostrar que la equipolencia de vectores es una *relación de equivalencia,* pues es

1.° *Reflexiva:*

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MN}$$

2.° *Simétrica:*

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MN}$$

3.° *Transitiva:*

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ} \\ \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{EF} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EF}$$

En efecto $MN//EF$, por ser ambas paralelas a PQ, y, además, $MN = EF$, por ser ambos segmentos iguales al PQ. Luego $MEFN$, que tiene dos lados iguales y paralelos, es un palalelogramo, y por tanto (fig. 31):

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EF}$$

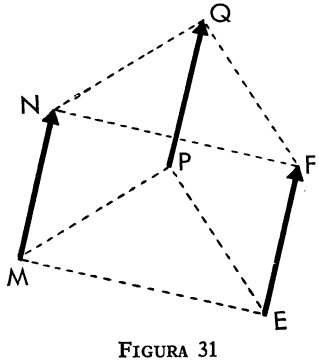


FIGURA 31

191. Vector libre.

La relación de equipolencia distribuye todos los vectores de un plano en *clases de equivalencia;* cada clase está constituida por todos los vectores del plano equipolentes entre sí, y se le denomina *vector libre.*

Uno cualquiera de los infinitos vectores que forman un vector libre se denomina *representante* del mismo.

Representaremos los vectores libres por letras negritas minúsculas. Si $\overrightarrow{AB}$ es un representante del vector libre **v**, pondremos

$$\mathbf{v} = \{\overrightarrow{AB}\}$$

El conjunto V de todos los vectores libres del plano no es más que el conjunto cociente $\frac{U}{R}$ del conjunto U de todos los vectores del plano por la relación de equipolencia R.

VECTOR LIBRE *es la clase de todos los vectores equipolentes a uno dado.*

Dos vectores libres **v** y **v'** serán iguales

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}'$$

cuando constan de los mismos vectores.

192. Teorema preliminar.

Existe un representante único de un vector libre **v**, *cuyo origen sea un punto dado arbitrario del plano.*

Sea $\overrightarrow{AB}$ un representante del vector **v**, y sea P el punto dado. Unamos A con P, y por P y B tracemos las paralelas PQ y BQ a AB y AP, respectivamente. El cuadrilátero $APQB$ es un paralelogramo, luego

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$$

y $\overrightarrow{PQ}$ pertenece al vector libre **v** (fig. 32).

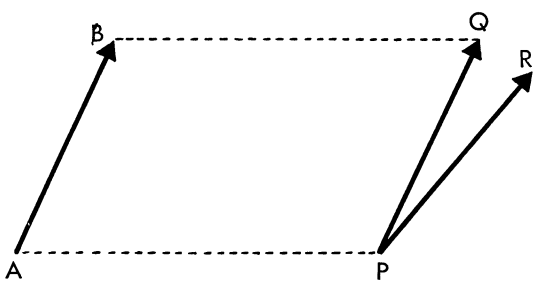


FIGURA 32

Si existiese otro representante $\overrightarrow{PR}$, serían $PR//PQ$, por ser ambas paralelas a AB, y $BR//BQ$, por ser ambas paralelas a AP. Luego $R \equiv Q$.

193. Adición de vectores libres.

Dados los vectores libres **a** y **b**, definiremos la *adición* de los mismos así: se toma un punto P cualquiera del plano, y se traza $\overrightarrow{PA}$ representante de **a**. y a continuación $\overrightarrow{AB}$ representante de **b**; el vector **a** + **b** es el formado por $\overrightarrow{PB}$ y todos sus equipolentes (fig. 33).

194. Propiedades de la adición de vectores libres.

I. *Uniforme:* La suma de dos vectores libres es independiente del punto P escogido para efectuarla.

En efecto, sea P' otro punto cualquiera del plano, y sean $P'A'$ y $P'B'$ representantes respectivos de los vectores libres **a** y **b**. Por tanto $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{P'A'}$ y $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, por lo que los cuadriláteros $PAA'P'$ y $ABB'A'$ son paralelogramos. Ya que los segmentos PP'

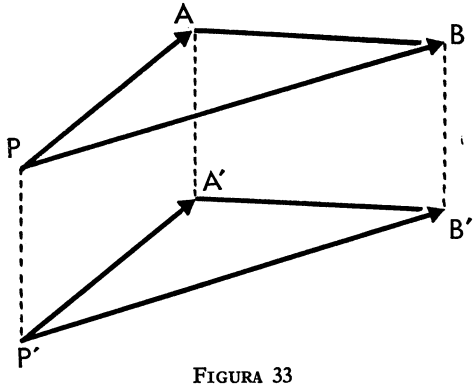


FIGURA 33

y BB' son iguales y paralelos, por serlo ambos al AA', la figura $PBB'P'$ es un paralelogramo, y

$$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{P'B'}$$

II. *Conmutativa:*

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

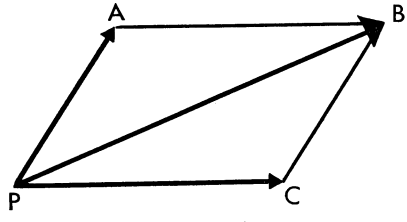


FIGURA 34

Sean $\overrightarrow{PA}$ representante de **a** (fig. 34) y $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{PC}$ representantes de **b**. Por tanto, $PABC$ es un paralelogramo, y $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{PA}$. Luego

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{\overrightarrow{PB}\} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

III. *Asociativa:*

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$$

Sean $\overrightarrow{PA}$ representante de **a**, $\overrightarrow{AB}$ representante de **b**, y $\overrightarrow{BC}$ representante de **c**. Se verifica que

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \{\overrightarrow{PB}\} + \mathbf{c} = \{PC\}$$

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} + \{\overrightarrow{AC}\} = \{PC\}$$

De donde resulta lo pedido.

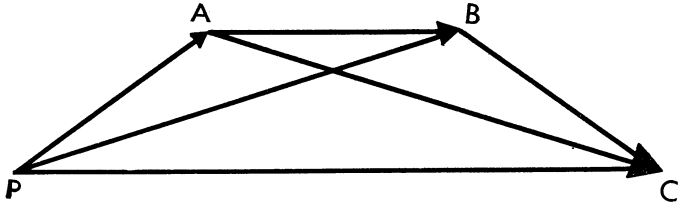


FIGURA 35

IV. *Elemento neutro:* Llamamos *vector libre cero,* y lo representamos por **0**, al formado por todos los vectores cuyo origen coincide con su extremo. De aquí resulta, representando por **a** un vector libre cualquiera

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$$

El elemento neutro de la adición de vectores libres es el vector cero.

V. *Elemento simétrico:* A todo vector libre $\mathbf{a} = \{\overrightarrow{PA}\}$ le podemos hacer corresponder otro $\{\overrightarrow{AP}\}$, que se denomina su *opuesto,* y se representa por $-\mathbf{a}$. Se verifica que

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \{\overrightarrow{PA}\} + \{\overrightarrow{AP}\} = \{\overrightarrow{PP}\} = \mathbf{0}$$

Todo elemento del conjunto de vectores libres tiene un elemento simétrico, que es su vector opuesto.

La igualdad $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ se puede escribir $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, que se llama *diferencia* de los vectores *a* y *b*. Por tanto, *hallar la diferencia entre* **a** *y* **b** *es lo mismo que sumar* **a** *con el opuesto de* **b**

En virtud de estas cinco propiedades podemos decir que *el conjunto de todos los vectores libres del plano tiene estructura de grupo aditivo.*

195. Multiplicación de vectores por números reales.

No puede definirse la multiplicación de vectores en el plano como ley de composición interna. Se puede definir, en cambio, el *producto escalar* de dos vectores, como ley de composición externa, y también el producto de un vector por un número real. Vamos a considerar ahora este último.

Se llama *producto* del vector libre $\mathbf{v} = \{\overrightarrow{AB}\}$ por el número real λ, a otro vector que representaremos por $\lambda\mathbf{v} = \{\overrightarrow{AC}\}$, y cuyos elementos son (fig. 36):

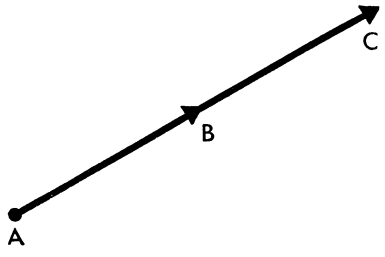


FIGURA 36

1.° El módulo de $\lambda\mathbf{v}$ es $|\lambda| \cdot$ módulo de $\mathbf{v}$;
2.° La dirección de $\lambda\mathbf{v}$ coincide con la dirección de $\mathbf{v}$;
3.° El sentido de $\lambda\mathbf{v}$ coincide con el de $\mathbf{v}$ *si* $\lambda > 0$, y es el opuesto al de $\mathbf{v}$, si $\lambda < 0$.

196. Propiedades de la multiplicación de vectores por números reales.

I'. *Distributiva respecto a la adición de números reales:*

$$(\lambda + \mu)\,\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}$$

II'. *Distributiva respecto a la adición de vectores:*

$$\lambda(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = \lambda\mathbf{v} + \lambda\mathbf{u}$$

III'. *Asociativa:*

$$(\lambda\mu)\,\mathbf{v} = \lambda(\mu\mathbf{v})$$

IV'. *Elemento neutro:*

$$1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$$

No insistimos en las demostraciones, ya que ni los números reales ni la teoría de la medida se han estudiado adecuadamente en Cursos o en lecciones anteriores.

197. Concepto de espacio vectorial.

En el conjunto V de los vectores del plano hemos definido dos leyes de composición u operaciones, una interna, la adición, que suministra a V la estructura de *grupo aditivo*, otra externa, la multiplicación por los elementos del cuerpo R de los números reales, que cumple las propiedades I' a IV' del número anterior. En estas condiciones se dice que *el conjunto* V *de los vectores libres del plano constituyen un espacio vectorial.*

En general, se define:

Espacio vectorial sobre un cuerpo K *es todo conjunto* C *en el que se pueden definir dos operaciones, una interna, la adición, y otra externa, la multiplicación por elementos de* K, *tales que el resultado de efectuar dichas operaciones pertenece siempre a* C *y se verifican las nueve propiedades I a V y I' a IV'.*

Son numerosos en Matemáticas los *ejemplos* de espacios vectoriales. Así, el conjunto R de los números reales sobre el mismo cuerpo R. O el conjunto P de polinomios de primer grado y coeficientes racionales sobre Q.

198. Traslaciones en el plano.

Se llama *traslación definida por el vector* **v**, *y* se representa por *T, una correspondencia en la que cada punto* A *del plano se transforma en otro punto* A' *tal que el vector* $\overrightarrow{AA'} \in \mathbf{v}$.

Dado un punto A existe un único vector $\overrightarrow{AA'}$ perteneciente a **v**, y dado el punto A' existe un único vector $\overrightarrow{A'A}$ perteneciente a $-\mathbf{v}$. Luego *las traslaciones son correspondencias biunívocas.* Al punto A' correspondiente del A, le llamaremos su *homólogo* en la traslación.

Una traslación transforma una recta en otra recta paralela. En efecto, sea una recta r, y en ella tres puntos A, B y C. Sean A', B' y C' sus homólogos en la traslación definida por **v**. Será $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} =$

$= \overrightarrow{C\,C'}$. Luego $A'\,B' \,//\, A\,B$, $B'\,C' \,//\, B\,C$, y por tener el punto B' común, las dos rectas coinciden (fig. 37).

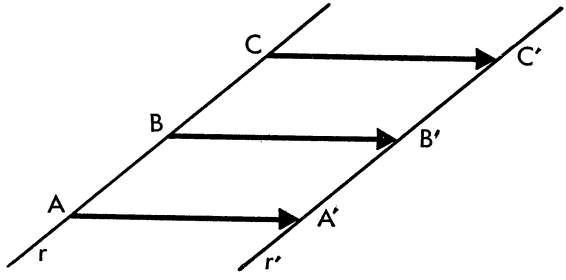


FIGURA 37

La traslación transforma los segmentos en segmentos iguales y paralelos. Así, $A'\,B' = A\,B$, $B'\,C' = B\,C$, etc. (fig. 37).

199. Figuras homólogas en la traslación.

La traslación transforma un triángulo cualquiera $A\,B\,C$ en otro triángulo igual $A'\,B'\,C'$, ya que tienen sus tres lados iguales. Transforma, por tanto, los ángulos en ángulos iguales.

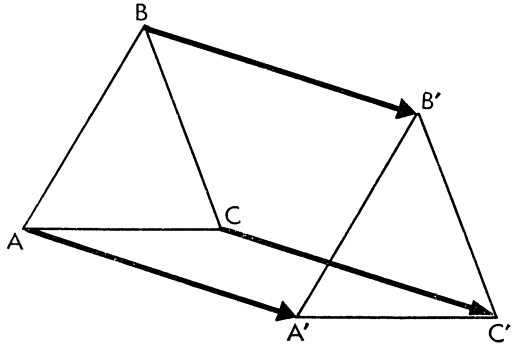


FIGURA 38

Ya que cualquier polígono se puede descomponer en triángulos, deducimos que *la traslación transforma cualquier figura en otra figura igual.*

Las dos figuras homólogas en una traslación tienen todos sus elementos iguales y en el mismo sentido; se dice que son *directamente iguales.*

200. Producto de dos traslaciones del plano.

Sea una traslación T que transforma A en A' (fig. 39), de modo que $T(A) = A'$, y otra traslación T' que transforma A' en A'', de modo que $T'(A') = A''$. Llamamos *producto* de las dos traslaciones, y la representamos por $T'\,T$, a la correspondencia que existe entre A y A''. De modo que $T'\,T(A) = T'(A') = A''$.

Veamos que esta correspondencia es la traslación definida por el vector $\{\overrightarrow{A\,A''}\} = \{\overrightarrow{A\,A'} + \overrightarrow{A'\,A''}\}$.

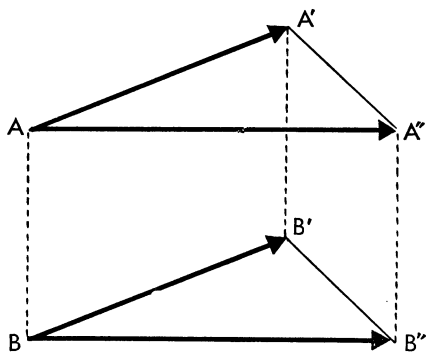


FIGURA 39

En efecto, sea B otro punto cualquiera del plano, B' su homólogo en la traslación T y B'' el homólogo de B' en la traslación T'. Por tanto, $\overrightarrow{A\,A'} = \overrightarrow{B\,B'}$, $\overrightarrow{A'\,A''} = \overrightarrow{B'\,B''}$, y las figuras $A\,A'\,B\,B'$ y $A'\,A''\,B''\,B'$ son paralelogramos. Los segmentos $A\,B$ y $A''\,B''$, que son iguales y paralelos al $A'\,B'$, son iguales y paralelos entre sí. Luego $A\,A''\,B''\,B$ es un paralelogramo, y $\overrightarrow{A\,A''} = \overrightarrow{B\,B''}$.

El producto de dos traslaciones T *y* T' *definidas por los vectores* $\mathbf{v}$ *y* $\mathbf{v}'$ *es otra traslación definida por el vector* $\mathbf{v} + \mathbf{v}'$.

201. El grupo de las traslaciones del plano.

Consideremos ahora el conjunto de todas las traslaciones planas. Hemos definido en él una operación llamada *producto*, que de dos elementos T y T' nos permite obtener otro $T'' = T' \cdot T$ también del conjunto, y con las siguientes propiedades:

I. *Uniforme:* El producto $T'\,T$ no depende de los representantes elegidos, según se ha demostrado en el número anterior.

II. *Conmutativa:*

$$T \cdot T' = T' \cdot T$$

En efecto, tracemos por A una paralela $A\,A_1$ a $A'\,A''$, y por A'' una paralela a $A''\,A_1$ a $A'\,A$. Será $\overrightarrow{A\,A'} = \overrightarrow{A_1\,A''}$, $\overrightarrow{A'\,A''} = \overrightarrow{A\,A_1}$ y además (fig. 40).

$$\overrightarrow{A\,A'} + \overrightarrow{A'\,A''} = \overrightarrow{A\,A_1} + \overrightarrow{A_1\,A''}$$

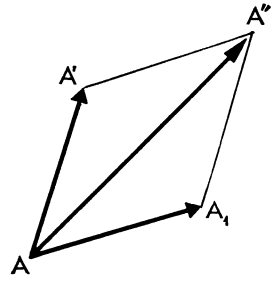


FIGURA 40

III. *Asociativa:*

$$T''(T'\,T) = (T''\,T')T$$

en virtud de la propiedad asociativa de la adición de vectores libres.

IV. *Elemento neutro:* Se llama *traslación unidad,* o *identidad,* y se representa por 1, la definida por el *vector nulo.*

Es evidente que

$$T \cdot 1 = T$$

V. *Elemento simétrico:* A toda traslación T definida por el vector **v**, le corresponde otra que denominamos *inversa* y representamos por T^{-1}, definida por el vector opuesto $-\mathbf{v}$; y es evidente que

$$T^{-1} \cdot T = 1$$

La inversa de la traslación definida por $\{\overrightarrow{A\,A'}\}$ es la definida por $\{\overrightarrow{A'\,A}\}$.

Deducimos de las propiedades I a V que *el conjunto de las traslaciones planas constituye un grupo abeliano.*

202. Aplicaciones del método de traslaciones.

EJEMPLO 1.—*Situar entre dos rectas dadas* r *y* r′ *un segmento* A B (fig. 41) *de longitud y dirección dadas* (las del vector $\overrightarrow{MN}$).

Solución.—Apliquemos a la recta r una traslación definida por el vector $\overrightarrow{MN}$ y sea su transformada r''. La intersección de r'' con r' da el punto B por el cual trazaremos el segmento AB paralelo al MN.

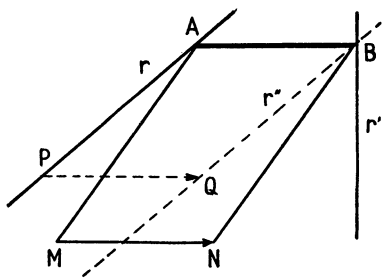


FIGURA 41

La construcción, por tanto, se reduce a tomar un punto P cualquiera de r, trazar por él como origen un vector $\overrightarrow{PQ}$ equipolente al $\overrightarrow{MN}$, y por Q trazar la paralela r'' a r. El segmento AB será igual y paralelo al PQ, por paralelas entre paralelas.

Este problema equivale a *construir un paralelogramo* A B M N, *cuyos vértices consecutivos* M *y* N *se dan, y cuyos vértices* A *y* B *deben hallarse respectivamente sobre las rectas dadas* r *y* r′.

Es muy conveniente emplear este método en problemas parecidos que se reduzcan a situar entre dos líneas conocidas un segmento de longitud y dirección dadas. Trasladando una de las líneas, la intersección de la otra con la trasladada proporcionará la solución del problema.

EJEMPLO 2.—*Situar entre dos circunferencias dadas, de centros* O *y* O′, *un segmento de longitud y dirección conocidas* (dadas por el vector $\overrightarrow{MN}$).

Solución.—Supuesto resuelto el problema (fig. 42), vemos que al aplicar a A

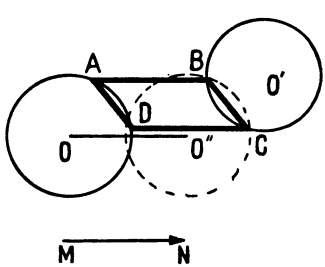


FIGURA 42

la traslación definida por $\overrightarrow{M\,N}$, se superpone con B, y que en el mismo punto se cortan la circunferencia O' y la homóloga de O en la traslación $\overrightarrow{M\,N}$.

Por tanto la construcción consiste en trazar el vector $\overrightarrow{O\,O''}$ equipolente al $\overrightarrow{M\,N}$, y con O'' como centro construir una circunferencia igual a la de centro O. Según que esta circunferencia trasladada corte a la de centro O' en dos puntos, uno o ninguno, habrá dos soluciones (segmentos $A\,B$ y $D\,C$), una o ninguna.

EJEMPLO 3.—*Sobre dos circunferencias iguales de centros* O *y* O′ *se llevan arcos iguales* A B = A′ B′ = x, *a partir de sendos puntos* A *y* A′, *fijos a ellas. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios* P *de los segmentos* B B′, *al variar* x *de posición, cuando los arcos se llevan en igual sentido* (fig. 43).

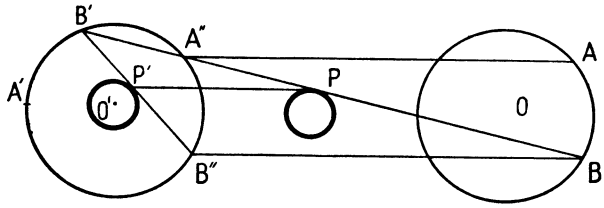


FIGURA 43

Solución.—Se aplica a la circunferencia de centro O la traslación definida por $\overrightarrow{O\,O'}$. Al ser iguales los radios, las dos circunferencias se superponen, siendo A'' y B'' los homólogos de A y B.

Al variar x, las cuerdas $B'\,B''$ cambian de posición, pero no de longitud; y como las cuerdas iguales distan lo mismo del centro, el lugar geométrico de los puntos P', medios de dichas cuerdas, es una circunferencia de centro O y radio $O'\,P'$.

Por otra parte el segmento $B''\,B$ es de dirección y módulo constantes (iguales a los del vector $O'\,O$). Por tanto el segmento $P'\,P$ es de dirección constante y de módulo mitad que $B''\,B$, por ser paralela media del triángulo $B\,B'\,B''$.

Es decir, el lugar de los puntos P es la circunferencia homóloga de la figura lugar de los puntos P', en la traslación de guía $\overrightarrow{P'\,P}$, mitad de $\overrightarrow{O'\,O}$.

Resuelve el caso en que los arcos se lleven en sentidos opuestos.

EJERCICIOS

1. Halla el lugar geométrico de los extremos de las paralelas a una dirección determinada, de sentido dado y de longitud l, trazados por los distintos puntos de una circunferencia dada. Resuelve también el caso en que no se indique el sentido.
2. Traza las tangentes comunes a dos circunferencias dadas.

3. Dada una circunferencia C y una recta r, determina un punto que diste de la circunferencia una distancia dada a, y de la recta otra distancia dada b.

4. Determina el camino mínimo para ir de A a B debiendo atravesar perpendicularmente el río r (figura 44).

5. Construye un cuadrilátero, dadas las dos diagonales, el ángulo que forman y dos lados opuestos.

6. Idem íd., conociendo, en lugar de los lados, dos ángulos opuestos.

7. Dadas dos paralelas y una secante, construye un triángulo equilátero de lado dado, de manera que dos de sus vértices estén en las paralelas y el tercero en la secante.

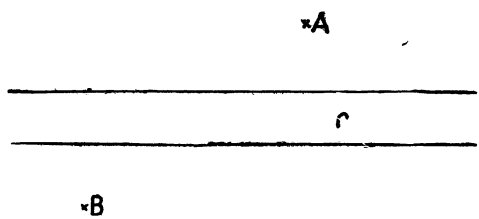


FIGURA 44

8. Dadas dos rectas paralelas, traza por un punto dado una secante tal que la parte comprendida por dichas paralelas sea igual a una longitud determinada m.

9. Por un punto P dado, traza a dos rectas paralelas r y r' dadas, una secante tal que la suma de las distancias de dicho punto a aquellos donde la secante encuentre a las paralelas sea igual a una longitud dada n.

10. Dada una circunferencia C y una recta r, traza una paralela a ésta que sea secante a aquélla y de manera que la cuerda interceptada tenga una longitud conocida m.

11. Dadas dos circunferencias exteriores C y C' y una recta r, traza una secante paralela a la recta dada, y de manera que la suma de las cuerdas interceptadas sea igual a una longitud conocida m.

12. Desde un barco cuyo rumbo y velocidad se conocen se ven dos puntos costeros A y B. Medido el ángulo de ambas visuales en dos instantes, con un intervalo de tiempo conocido, halla en la carta —donde se encuentran A y B— la situación del barco en ambas observaciones.

13. Dadas dos rectas paralelas r y r' (fig. 45) y los dos puntos fijos A y B,

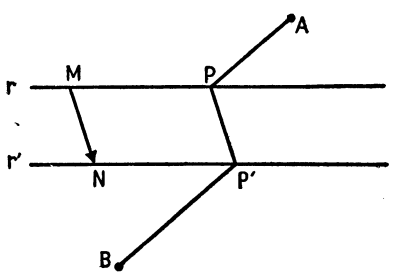


FIGURA 45

a un lado y otro de la banda que delimitan r y r', halla sobre r un punto P, y sobre r' un punto P', tales que PP' tenga una dirección dada (la del vector MN) y además: a) las distancias AP y BP' sean iguales; b) las rectas AP y BP' sean perpendiculares; c) el camino total $AP + PP' + P'B$ sea mínimo.

14. Construye un cuadrilátero $ABCD$ conociendo las longitudes y direcciones de las diagonales AC y BD, y las longitudes de los lados opuestos AB y CD, utilizando la traslación $\overrightarrow{BD}$ aplicada a la diagonal AC.

19

LOS GIROS EN EL PLANO

203. Transformaciones geométricas.

Transformación geométrica es toda correspondencia entre dos figuras deducidas una de otra según una ley determinada. Este concepto es análogo al de *función* en Análisis Matemático, y domina la Geometría Moderna desde hace más de un siglo.

Las traslaciones estudiadas en la lección anterior son un ejemplo de transformación geométrica.

Designando con la letra T la transformación que hace pasar de la figura F a la F', llamaremos su transformación *inversa*, y la designaremos con T^{-1}, a la que hace pasar de F' a F.

Si una transformación T hace pasar de F a F', y otra T' transforma F' en F'', se llama *producto* de las dos transformaciones, y se representa por $T' \cdot T$ a la operación única que hace corresponder directamente F con F''.

Se llama *elemento doble* en una transformación a todo elemento al que la transformación hace corresponder el mismo.

Una transformación de una figura F que le hace corresponder la misma figura, de modo que todos sus elementos sean dobles, se denomina *transformación idéntica* o *identidad*, y se representa con el símbolo 1.

El producto de transformaciones puntuales tiene siempre la propiedad asociativa. En efecto, sea T la transformación que cambia A en A', o sea $T(A) = A'$, T' la que cambia A' en A'', o sea $T'(A') = A''$, y T'' la que cambia A'' en A'''. Llamando

$$T_1(A) = T'\,T(A) = T'(A') = A''$$

será

$$T''\left[T'\,T(A)\right] = T''\,T_1(A) = T''(A'') = A'''$$

Del mismo modo, llamando

$$T_2(A') = T''\,T'(A') = T''(A'') = A'''$$

se tiene

$$(T''\,T')\,T(A) = T_2\,T(A) = T_2(A') = A'''$$

Luego

$$T''(T'\,T) = (T''\,T')T$$

Cuando un conjunto de transformaciones es tal que contiene todas las transformaciones inversas y todas las transformaciones producto de dos cualesquiera del conjunto, se dice que forman *grupo*. Este no tiene en general la propiedad conmutativa, pero cuando lo posee se denomina *grupo abeliano* o *conmutativo*.

204. Congruencias directa e inversa.

Provisionalmente diremos que:

Dos figuras son iguales o congruentes *si se puede transportar una sobre otra de modo que coincidan exactamente en todas sus partes.*

A cada punto A de una de las figuras queda así asociado el punto A' de la otra con el cual ha coincidido, y que se denomina su *homólogo*.

Sean F y F' dos figuras iguales de un mismo plano, y consideremoslas por un instante como pertenecientes a dos planos diferentes superpuestos. Se dice que son *directamente congruentes* cuando se pueden hacer coincidir sin invertir el plano de la figura transportada; o de otra forma, haciendo deslizarse ésta sin que salga de su plano. Tal ocurre con los triángulos F y F' de la figura 46*a*. Ambas tienen todos sus elementos iguales y colocados en el mismo sentido.

En el caso de que la figura transportada tenga que salir del plano para poder coincidir con F, se dice que ambas figuras son *inversamente iguales*. Tal sucede con los triángulos F y F'' en la figura 46*b*. Ambos tienen todos sus elementos iguales, pero situados en sentido contrario.

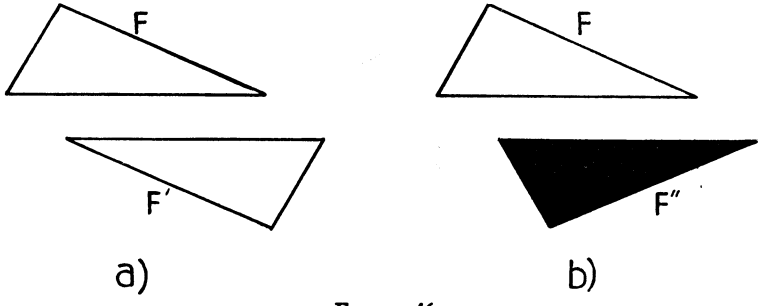


FIGURA 46

Tenemos ejemplos de igualdad directa en las plantillas de los pintores para hacer letras o motivos ornamentales, o en los patrones de los sastres para cortar la tela.

Ejemplos de igualdad inversa son un escrito y su marca en el papel secante (fig. 47), los clichés de imprenta y sus copias, etc.

Un modo intuitivo para distinguir las dos clases de congruencia es suponer el plano blanco por la parte superior y negro por la parte inferior. Dos figuras directamente iguales aparecerán blancas (figu-

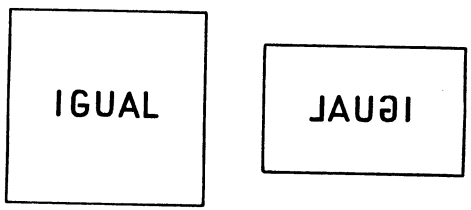


FIGURA 47

ra 46 *a*). Se llama *movimiento directo* el que lleva a coincidir una sobre otra, sin salirse del plano.

Dos figuras inversamente iguales aparecerán una en blanco y otra en negro (fig. 46*b*). El movimiento para hacerlas coincidir se sale del plano, requiere dar la vuelta a la figura, y se denomina *movimiento inverso.*

205. Noción general de movimiento.

Todo lo que precede reposa sobre el postulado fundamental de la *existencia de figuras invariables,* es decir, de la posibilidad del movimiento sin deformación de las figuras geométricas. Pero en Geometría se considera la correspondencia entre dos figuras congruentes como totalmente independiente de las posiciones intermedias que ocupó una de las figuras al ir a coincidir con la otra. *La correspondencia entre dos figuras congruentes, dependiente solamente de las posiciones inicial y final,* se denomina en Geometría *movimiento.*

Esta correspondencia asocia a cada punto A de una figura otro homólogo A' de la segunda figura. Constituye así un primer ejemplo de la noción fundamental de *transformación,* de que hablamos al principio.

De las propiedades estudiadas en la lección anterior deducimos que:

Las traslaciones son movimientos directos.

206. Los giros en el plano.

El giro o rotación es una transformación en virtud de la cual a todo punto A *de una figura* F *le corresponde otro punto* A′ *de otra figura* F′ *tal que sus distancias a un punto fijo* O, *llamado* CENTRO DE GIRO, *son iguales, y las semirrectas* O A *y* O A′ *forman un ángulo constante y determinado en amplitud y sentido, llamado* ÁNGULO DE GIRO.

Sea A' el transformado u homólogo de A y B' el transformado de B en un giro de centro O y amplitud o ángulo orientado α (fig. 48).

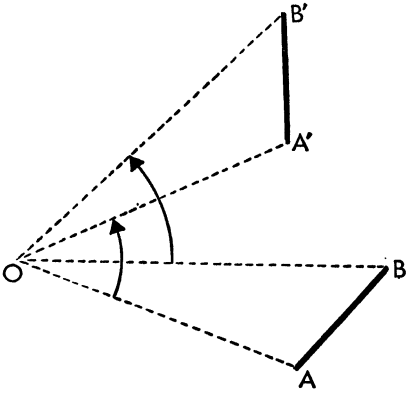


FIGURA 48

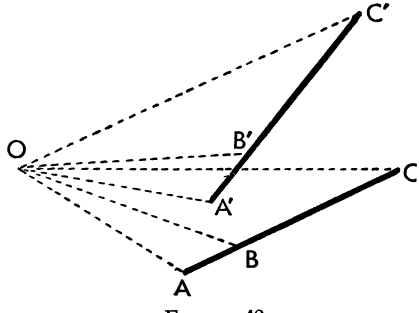


FIGURA 49

Será

$$OA = OA'$$
$$OB = OB'$$
$$\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'} = \alpha$$

Restando de los dos miembros de esta igualdad $\widehat{BOA'}$, resulta

$$\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$$

Luego los triángulos AOB y $A'OB'$ son iguales, y por tanto,

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}$$

Los segmentos que unen puntos homólogos en un giro son iguales.

Como consecuencia, deducimos que:

Los giros transforman rectas en rectas.

Sean, en efecto, A, B y C tres puntos alineados, y A', B' y C' sus tres homólogos en el giro. Según el teorema anterior, será:

$$A\,B = A'\,B',\ B\,C = B'\,C',\ A\,C = A'\,C'$$

Pero, además,

$$A\,C = A\,B + B\,C = A'\,B' + B'\,C'$$

Luego

$$A'\,C' = A'\,B' + B'\,C'$$

y por tanto, B' pertenece al segmento $A'\,C'$; está alineado con A' y C', lo que demuestra el teorema.

207. Figuras homólogas en un giro.

Un giro transforma los puntos de un segmento en los de otro igual a él, según se ha demostrado en el número anterior.

Un giro transforma un triángulo en otro igual a él, ya que sus tres lados serán iguales.

Por tanto, *el transformado de un ángulo en un giro es otro ángulo igual a él.*

Ya que un polígono se puede descomponer en un cierto número de triángulos, y una figura curva cualquiera es el límite de los polígonos inscritos en la misma cuyo número de lados aumenta indefinidamente, resulta que *dos figuras cualesquiera homólogas en un giro son siempre directamente iguales:* tienen todos sus elementos iguales y colocados en el mismo sentido. O sea:

Los giros son movimientos directos.

Al punto O le corresponde el mismo punto: es *doble.*

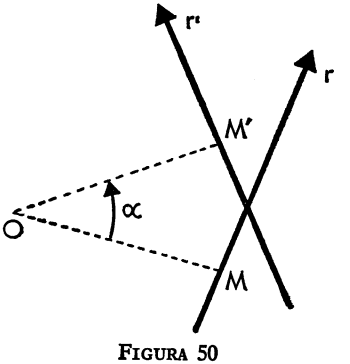


FIGURA 50

Es interesante hacer observar que el ángulo formado por dos rectas homólogas es igual a la amplitud α del giro. En efecto, al punto M de r más próximo a O le corresponde el M' de r' más próximo a O. Siendo $O\,M$ y $O\,M'$ perpendiculares a r y r', forman ángulos iguales (fig. 50).

208. Superposición de dos figuras directamente iguales.

Sean dos segmentos orientados iguales $\overrightarrow{A\,B} = \overrightarrow{A'\,B}$. Vamos a estudiar los movimientos que se precisan para hacerlos coincidir (figura 51).

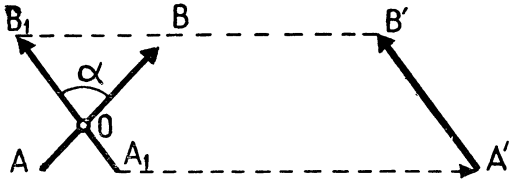


FIGURA 51

Una posible solución es girar el segmento $A\,B$ alrededor de un punto cualquiera O, hasta que sea paralelo a $A'\,B'$ (y del mismo sentido). Cualquiera que sea el punto O, el ángulo de giro α será constante, pues ángulos de lados paralelos son iguales.

Después, basta aplicar la traslación $\overrightarrow{A_1\,A'}$, y ambos quedan superpuestos. Esta traslación será distinta para cada punto O elegido.

Por tanto, *la superposición de dos segmentos iguales puede lograrse de infinitas maneras como producto de una traslación por un giro.*

Vamos a buscar un centro O de giro para el que la traslación es nula fig. 52).

Basta trazar las mediatrices de $A\,A'$ y de $B\,B'$. El punto O en que se cortan es el centro pedido. Pues siendo $O\,B = O\,B'$ y $O\,A = O\,A'$, los triángulos $O\,A\,B$ y $O\,A'\,B'$ son iguales, y lo mismo los ángulos de giro $B\,O\,B'$ y $A\,O\,A'$.

Por tanto *la superposición de dos segmentos iguales puede lograrse mediante un giro único alrededor de un punto* O *bien determinado.*

Lo mismo puede decirse de dos figuras cualesquiera directamente iguales, ya que la superposición de éstas equivale a la de dos de sus lados homólogos orientados.

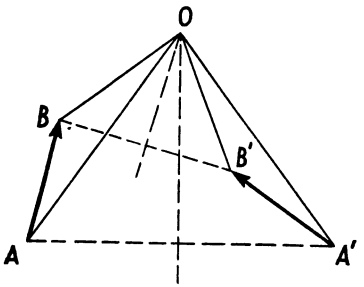


FIGURA 52

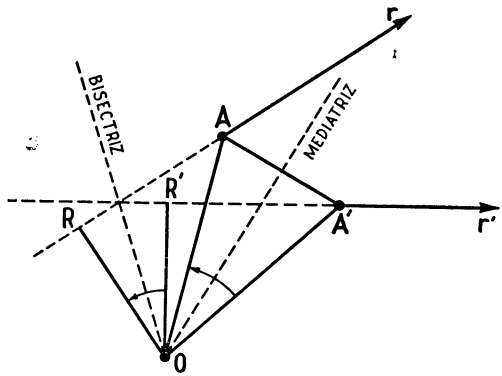


FIGURA 53

209. Construcción del centro de giro cuando se conocen dos puntos homólogos y dos semirrectas homólogas.

Hemos visto en el número anterior cómo se determina el centro de giro O cuando se conocen dos pares de puntos homólogos A y A', B y B'. Veamos ahora cómo se procede en el caso de conocerse *dos semirrectas homólogas* r *y* r' *y en ellas dos puntos homólogos* A *y* A' (fig. 53). Entonces el centro O es el punto de intersección de la mediatriz del segmento AA' y de la bisectriz del ángulo adyacente del formado por las semirrectas. En efecto, por ser O un punto de la mediatriz, es $OA = OA'$, y por ser un punto de la bisectriz, es $OR = OR'$. Luego los triángulos rectángulos ORA y $OR'A'$ son iguales, y por tanto $\widehat{AOR} = \widehat{A'OR'}$. Restando a los dos miembros el ángulo AOR', queda

$$\widehat{A'OA} = \widehat{R'OR} = \alpha$$

ángulo de giro.

210. Grupo de giros con el mismo centro.

1.º *El producto de dos o más giros concéntricos es otro giro del mismo centro cuya amplitud* (ángulo de giro) *es la suma de las amplitudes.* En efecto, si al punto A le corresponde el A' en el giro

de amplitud α, y al punto A' le corresponde el A'' en el giro de amplitud α', al A le corresponderá el A'' en un giro de amplitud $\alpha + \alpha'$ (fig. 54, *a*).

Los homólogos A', A'', A''' de un mismo punto A en todos los giros del mismo centro O equidistan todos de O. Por tanto *las trayectorias en todos los giros concéntricos consecutivos son circunferencias con centro en el de giro.*

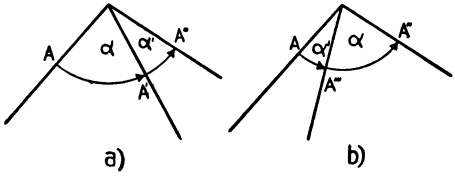


FIGURA 54

2.º *La transformación inversa de un giro es otro giro del mismo centro.*

3.º *Se obtiene la rotación unidad* (identidad) *con un giro de amplitud múltiplo de* 2π *radianes.*

4.º *El producto de dos giros es conmutativo.* En efecto, aplicando primero el giro de amplitud α' (fig. 54, *b*) obtenemos A''' y aplicando a éste el giro de amplitud α, obtenemos el mismo resultado, A'', que antes. Pues el ángulo $\alpha' + \alpha = \alpha + \alpha'$.

De las cuatro conclusiones anteriores deducimos que: *El conjunto de los giros concéntricos de un plano forman un grupo abeliano.*

No puede decirse lo mismo de *los giros de distinto centro.* Estos *no forman grupo.* Así dos giros de 180º respecto a dos centros distintos equivalen a una traslación.

211. Aplicaciones del método de giros.

EJEMPLO 1.—*Construir un triángulo equilátero cuyos vértices estén situados sobre tres rectas paralelas dadas* (fig. 55). Sean *a*, *b* y *c* las paralelas, en las que han de estar respectivamente los vértices *A*, *B* y *C*. Podemos tomar arbitrariamente el vértice *A* sobre la recta *a*, y entonces se observa que el vértice *B* se deduce del *C* por un giro de 60° alrededor del punto *A*. Debe además estar situado sobre la recta *c'* correspondiente de *c* en dicho giro. El punto *B* es, por tanto, la intersección de las rectas *b* y *c'*. Esta última es perpendicular en *N* al lado *A N* del triángulo equilátero *A M N* construido sobre el segmento de recta *A M*, perpendicular desde *A* a *c*.

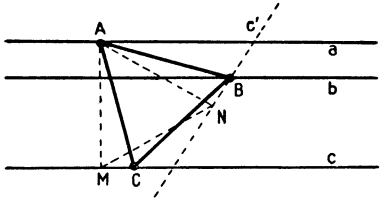


FIGURA 55

Si no se impone el sentido de circulación *A B C* habría otra solución simétrica de la dada respecto de *A M*. Si hacemos que *A* se mueva sobre la recta *a*, se tiene una infinidad de triángulos

equiláteros, que se deducen del $A\,B\,C$ por una *traslación* arbitraria, paralela a las tres rectas dadas.

EJEMPLO 2.—*Hallar el lugar geométrico de los centros de los giros que transforman una recta dada en otra recta dada* (fig. 56).

Es la bisectriz del ángulo formado por estas dos rectas.

Desde un punto P de la bisectriz se trazan las perpendiculares $P\,A$ y $P\,A'$ a r y r'.

Aplicamos a la recta r un giro de centro P y amplitud (o ángulo de giro) igual al ángulo suplementario del formado por las rectas r y r'. El punto A coincidirá con el A', y como el punto P se transforma en sí mismo, la recta $P\,A$ se confunde con la recta $P\,A'$. Como r sigue siendo perpendicular a $P\,A$, coincidirá con r', que es perpendicular a $P\,A'$.

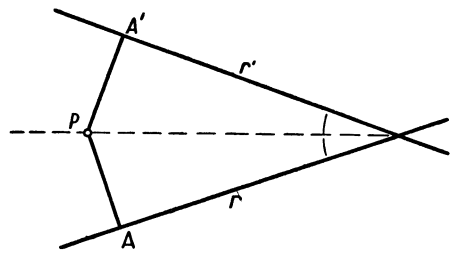


FIGURA 56

Por otra parte, si los puntos P no estuviesen en la bisectriz, $P\,A \neq P\,A'$ y evidentemente la homóloga de r en este giro no sería r'.

EJEMPLO 3.—*Construir un cuadrado que tenga un vértice en un punto dado* O *y los dos contiguos* A *y* B *en dos rectas dadas* a *y* b, *que no pasan por* O (figura 57).

Supongamos el problema resuelto. Vemos que podemos llevar el punto A sobre el B mediante un giro de 90 grados con centro en O. Es decir, B es la intersección de la recta b con la homóloga a' de a en el giro de 90 grados con centro en O. Teniendo dos puntos, O y B, del cuadrado, está resuelto el problema.

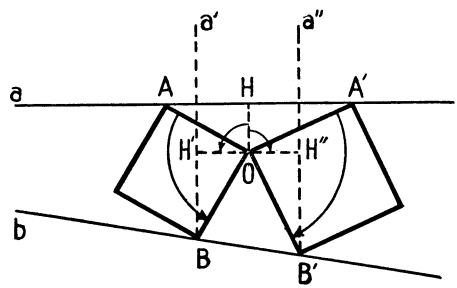


FIGURA 57

Como el giro puede hacerse en los dos sentidos, el problema tiene dos soluciones.

EJERCICIOS

1. Si dos fuerzas de intensidad constante giran el mismo ángulo alrededor de sus respectivos puntos de aplicación, supuestos fijos, probar que la resultante gira el mismo ángulo y pasa constantemente por un punto fijo.
2. Dado un triángulo equilátero $A\,B\,C$, ¿cuál es el punto O alrededor del cual hay que girar $A\,B$ para llevarlo a $C\,D$ en la prolongación de $A\,C$?

3. Colocar un triángulo equilátero de modo que sus vértices estén sobre tres circunferencias concéntricas. Discutir las soluciones.

4. Inscribir en un paralelogramo dado un rectángulo cuyas diagonales formen un ángulo dado.

5. Dadas dos rectas, a y b, y una circunferencia, C, construir un cuadrado que tenga dos vértices opuestos en a y los otros dos, uno en b y otro en C.

6. Construir un triángulo equilátero con un vértice en un punto dado del plano y los otros sobre dos circunferencias dadas.

7. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que el producto de dos giros no concéntricos sea una traslación en que los ángulos de giro sean iguales y de opuesto sentido.

8. Hallar el centro del giro resultante de multiplicar una traslación dada por un giro, dado por su centro y ángulo. ¿Qué variación experimenta este centro al permutar las operaciones componentes? ¿Cuál es el ángulo de giro resultante?

9. Dada la recta r de ecuación $y = mx + n$ $(n \neq 0)$, y el punto A$(0, a)$, haz aplicación del método de giros en el plano para encontrar un cuadrado $A\,B\,C\,D$ que tenga el vértice B sobre $O\,X$ y el D sobre la recta dada r. En el caso particular $n = a$, $m = -2$, deberán darse las coordenadas de los otros vértices B, C y D. ¿Cuántas soluciones tiene este problema?

10. Hallar las coordenadas del centro C del giro $G_2 = T \cdot G_1$, siendo T la traslación que lleva el origen de coordenadas al punto $A(4, 4)$, y G_1 el giro de centro A y amplitud 90°. Determinar después las coordenadas del punto B', homólogo de $B(2, -2)$ en el giro G_2.

20

SIMETRIAS EN EL PLANO. PRODUCTO DE TRASLACIONES, GIROS Y SIMETRIAS

212. La simetría central.

Es una transformación por la que a todo punto A *de un plano le corresponde otro homólogo* A', *tales que ambos están alineados con un punto fijo* O, *llamado* CENTRO DE SIMETRÍA, *a distinto lado de él y a la misma distancia* A O = O A' (fig. 58).

Esta transformación equivale a un giro de 180° alrededor de *O*, luego es un movimiento.

Si el homólogo de *A* en una simetría de centro *O* es *A'*, a su vez el homólogo de *A'* es el punto *A*. Esto se expresa diciendo que *los elementos homólogos en una simetría central se corresponden doblemente.* Por tanto aplicando dos veces consecutivas esta transformación, el movimiento resultante es la identidad (giro de 360°), o sea el cuadrado de la simetría central es la identidad.

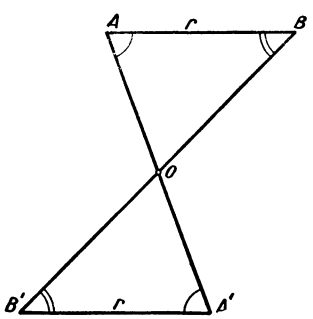


FIGURA 58

En general, una transformación cuyo producto por sí misma es la identidad, esto es, cuyos elementos homólogos se corresponden doblemente, se denomina *involución.*

Por consiguiente la simetría central es una *transformación involutiva,* o *involución.*

La semirrecta *O A* se transforma en la opuesta *O A'*, pues *O* es homólogo de sí mismo. Se dice que *O es punto doble* en la simetría. Asimismo *toda recta que pasa por el centro de simetría* O *es doble,* porque se transforma en sí misma.

Si una recta r, que no pasa por el centro O, contiene dos puntos A y B, su homóloga r' es la que pasa por A' y B', homólogos respectivamente de A y B (fig. 58). Pero como $OA = OA'$, $OB = OB'$ y además $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$, los triángulos AOB y $A'OB'$ son iguales. Luego

$$\widehat{OAB} = \widehat{OA'B'} \quad ; \quad \widehat{OBA} = \widehat{OB'A'}$$

y *las rectas homólogas* r *y* r' *son paralelas y equidistantes del centro.*

213. Centro de simetría de figuras planas.

Se dice que *una figura* F *tiene un centro de simetría* O *cuando sus puntos son dos a dos simétricos con relación a* O. Entonces evidentemente la figura F es doble en la simetría de centro O, ya que su transformada es ella misma.

Tal ocurre, por ejemplo, con el paralelogramo, respecto del punto de intersección de sus diagonales. En efecto, sea el paralelogramo $ABCD$ y sea O el punto de intersección de sus diagonales AC y BD (figura 59). Tomemos un punto cualquiera E sobre AD, unámosle con O hasta cortar en F al lado BC y demostremos que E y F son simétricos respecto a O, o sea que $OE = OF$. Esto se deduce inmediatamente de la igualdad de los triángulos OFC y OEA, que tienen iguales los lados $OC = OA$ e iguales los ángulos adyacentes:

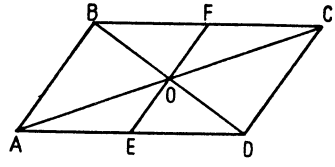


FIGURA 59

$\widehat{OCF} = \widehat{OAE}$, por alternos internos entre paralelas

$\widehat{COF} = \widehat{AOE}$, por opuestos por el vértice

214. Simetría axial.

Es una transformación que a todo punto A *de un plano le hace corresponder otro* A' *tal que la recta que los une es perpendicular a*

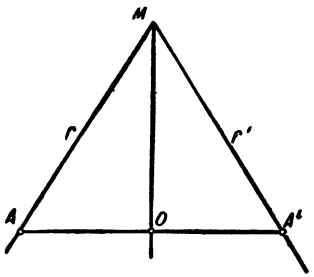


FIGURA 60

una recta fija O M, *llamado* EJE DE SIMETRÍA (figura 60), *quedando el segmento* A A′ *cortado por dicho eje en dos partes iguales.*

Es fácil ver que los elementos homólogos A y A' se corresponden doblemente, y por tanto la simetría axial es una transformación involutoria, cuyo cuadrado es la identidad.

Los puntos del eje son dobles, ya que se corresponden a sí mismos.

La recta $A\,A'$ tiene por homóloga la $A'\,A$, esto es ella misma. Luego:

El eje y todas las rectas perpendiculares a él son las únicas rectas dobles.

Todos los puntos del eje son dobles.

215. Figuras homólogas en una simetría axial.

Sean A y B dos puntos cualesquiera del plano, y A' y B' sus homólogos en una simetría de eje e (fig. 61). Tracemos la recta $A\,B$

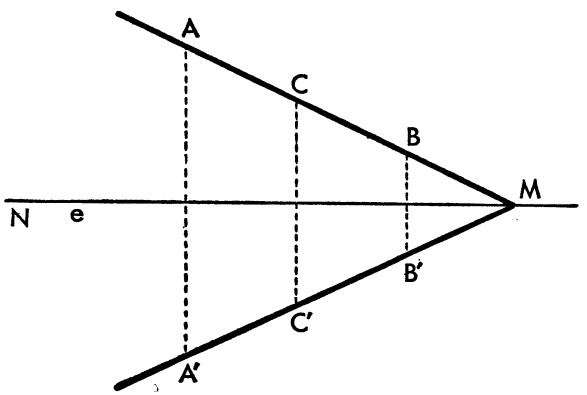


FIGURA 61

que corta a e en M. Unamos M con A' y B'. Los triángulos $M\,A\,A'$ y $M\,B\,B'$ son isósceles, y

$$\widehat{NMB'} = \widehat{NMB} = \widehat{NMA} = \widehat{NMA'}$$

Luego A' y B' están alineados con M.

Además:

$$M\,A = M\,A' \quad ; \quad M\,B = M\,B'$$

y por diferencia de éstas:

$$A\,B = A'\,B'$$

O sea: *Si* A' *y* B' *son los simétricos de* A *y* B, *respectivamente, se verifica que el segmento* A' B' *es igual al segmento A B.*

Sea ahora *C* otro punto cualquiera del segmento *A B*, y sea *C'* su simétrico respecto al eje *e*.

Según lo anterior, se tiene: $\overline{A\,C} = \overline{A'\,C'}$; $\overline{C\,B} = \overline{C'\,B'}$; $\overline{A\,B} = \overline{A'\,B'}$.

Pero además, $A\,B = A\,C + C\,B = A'\,C' + C'\,B' = A'\,B'$.

Luego *C'* está alineado con *A'* y *B'*, es decir:

Las simetrías transforman los segmentos en segmentos iguales; las rectas, en rectas que cortan a las primeras en puntos M *del eje.*

El eje de simetría es *bisectriz* del ángulo que forman dos rectas homólogas cualesquiera.

Las simetrías axiales transforman triángulos en triángulos iguales, ya que tienen sus tres lados respectivamente iguales (fig. 62).

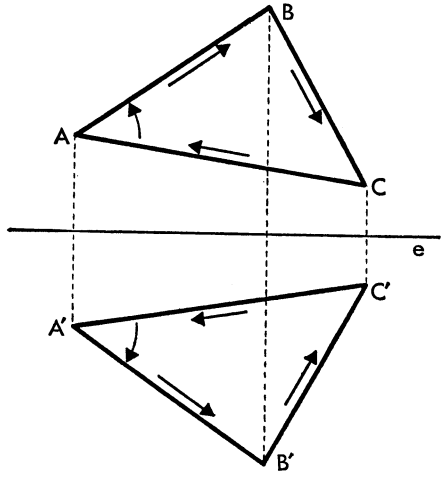


FIGURA 62

Por tanto, *transforman los ángulos en ángulos iguales, pero de sentido contrario.* Obsérvese en la figura, por ejemplo, el ángulo *A* y su homólogo *A'*.

También *cambian el sentido de recorrido de los triángulos:* el triángulo $A\,B\,C$ se recorre en el sentido negativo, el de las agujas del reloj, y el triángulo $A'\,B'\,C'$ en el sentido positivo, contrario a las agujas del reloj.

En resumen: *las simetrías axiales transforman una figura en otra inversamente igual; son movimientos inversos.*

De dos figuras simétricas no se puede lograr la superposición sin sacar una de las figuras del plano. Se logra en cambio dicha super-

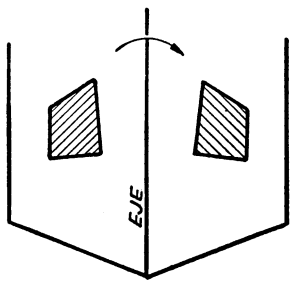


FIGURA 63

posición doblando el plano por el eje de simetría, como cuando se cierra un cuaderno. Pero en este movimiento la figura se sale del plano (fig. 63). Un doblez sobre el papel equivale a una simetría axial.

216. Eje de simetría de una figura plana.

Una figura plana F *tiene* UN EJE DE SIMETRÍA M N *cuando sus puntos son dos a dos simétricos con respecto a* M N. Dicha figura *F* es, por tanto, doble en la simetría de eje *M N*.

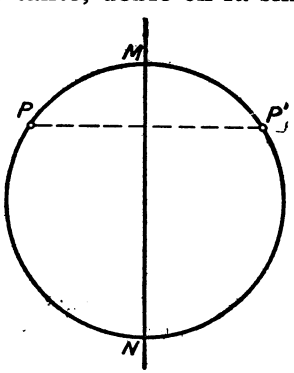


FIGURA 64

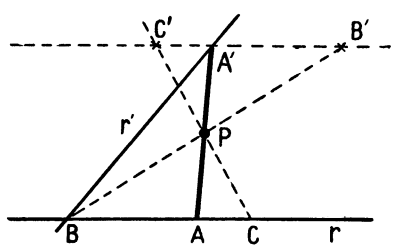


FIGURA 65

Tal sucede, por ejemplo, con la circunferencia, que tiene como eje de simetría cualquiera de sus diámetros (fig. 64), o un polígono regular que tiene como ejes de simetría los radios del círculo circunscrito que salen de los vértices o de los puntos medios de los lados.

217. Aplicaciones del método de simetrías.

EJEMPLO 1.—*Trazar por un punto* P *de un plano una recta que corte a dos rectas dadas* r *y* r′ *en dos puntos* A *y* A′ *de los cuales sea* P *el punto medio* (figura 65).

Supuesto el problema resuelto, A' será el homólogo del A en la simetría de centro P.

El punto A' resulta, pues, de la intersección de la recta r' con la $B'C'$, simétrica de r respecto a P.

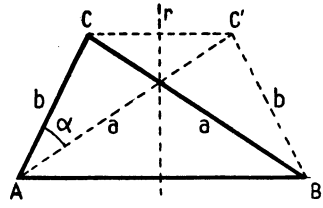


FIGURA 66

EJEMPLO 2.—*Construir un triángulo, conocidos dos lados* a *y* b *y la diferencia* α *de los ángulos opuestos* A *y* B (fig. 66).

Aplicando la simetría con eje r, mediatriz de AB, al triángulo ABC, se obtiene la figura $ACC'B$: en ella el triángulo CAC' es de construcción inmediata, pues se conoce el ángulo CAC' (igual a α) $CA = b$ y $AC' = CB = a$.

Una vez obtenido el triángulo ACC' se halla B por simetría con respecto a r (ahora mediatriz de CC') y se tiene resuelto el problema.

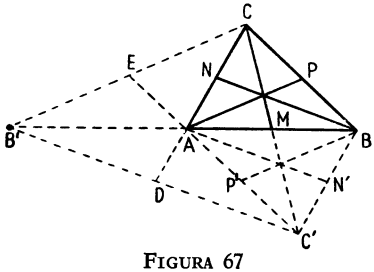


FIGURA 67

EJEMPLO 3.—*Construir un triángulo, dadas sus tres medianas* (fig. 67).

Supongamos el problema resuelto, y sea ABC el triángulo buscado, AP, CM y BN sus tres medianas conocidas.

Tracemos la figura simétrica del triángulo ABC y de sus tres medianas, respecto al punto M, medio de AB. Sabemos que $CAC'B$ es un paralelogramo y M su centro de simetría. Luego $MC = MC'$, $BN = AN'$, $AP = BP'$.

Hallemos ahora el simétrico B' de B respecto al punto A, y unamos B' con C y C'. La recta $B'M$ es mediana del triángulo $B'CC'$, y por ser $B'A = AB = 2AM$, el punto A está justamente a 2/3 del vértice y 1/3 de la base;

luego es el baricentro en dicho triángulo, esto es, el punto de concurso de las tres medianas $B'M$, CD y $C'E$.

Además $CC' = 2CM$, $B'C = 2AP$ (paralela media del triángulo $B'BC$), y $B'C' = 2AN' = 2BN$ (por la misma razón). Luego el triángulo $B'CC'$, cuyos lados son dobles de las medianas del pedido, puede construirse inmediatamente en función de los datos. Después de esto se construyen sus tres medianas, $B'M$, CD y $C'E$. Los segmentos de las mismas, $B'A$, CA y $C'A$, desde cada vértice hasta el punto de concurso A, son los lados del triángulo pedido; su construcción es por tanto inmediata.

218. Producto de simetrías axiales.

Supongamos que a una figura F le aplicamos primero una simetría de eje e, y a continuación otra de eje e', paralelo al primero.

Sea A un punto cualquiera de F: se transformará primero en A',

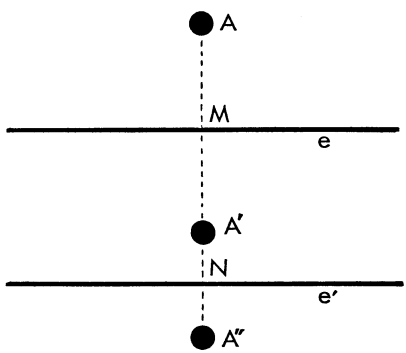


FIGURA 68

y luego éste en A'' (de la figura F''). ¿Cuál será la transformación que cambia directamente la figura F en la F''?

Por definición de simetría se deduce que (fig. 68):

$$\{\overrightarrow{AM}\} = \{\overrightarrow{MA'}\} \quad \text{y} \quad \{\overrightarrow{A'N}\} = \{\overrightarrow{NA''}\}$$

y por otra parte

$$\{\overrightarrow{AA''}\} = \{\overrightarrow{AM}\} + \{\overrightarrow{MA'}\} + \{\overrightarrow{A'N}\} + \{\overrightarrow{NA''}\} =$$

$$= 2\{\overrightarrow{MA'}\} + 2\{\overrightarrow{A'N}\} = 2\{\overrightarrow{MN}\}$$

Luego el vector $\overrightarrow{AA''}$ es constante, doble del vector $\overrightarrow{MN}$. O sea:

El producto de dos simetrías de ejes paralelos es una traslación, definida por un vector cuyo módulo es el doble de la distancia entre

los ejes, cuya dirección es la de la perpendicular a los ejes y cuyo sentido es el que va del primer eje al segundo.

Supongamos ahora que los ejes se cortan en un punto O. Los

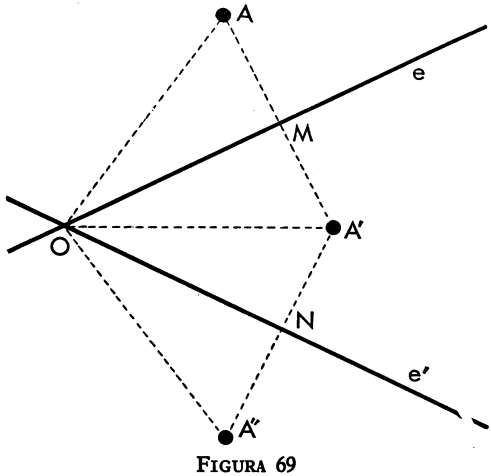


FIGURA 69

puntos A, A', A'', M y N tienen el mismo significado que antes (fig. 69). Ya que O es punto doble en las dos simetrías, se tiene

$$\overline{OA} = \overline{OA'} = \overline{OA''}$$

Además

$$\widehat{AOM} = \widehat{MOA'} \quad ; \quad \widehat{A'ON} = \widehat{NOA''}$$

y por tanto

$$\widehat{AOA''} = \widehat{AOM} + \widehat{MOA'} + \widehat{A'ON} + \widehat{NOA''} =$$

$$= 2\,\widehat{MOA'} + 2\,\widehat{A'ON} = 2\,\widehat{MON}$$

El ángulo $\widehat{AOA''}$ es constante, y se puede enunciar:

El producto de dos simetrías de ejes que se cortan es un giro cuyo centro es el punto de intersección de los dos ejes y cuya amplitud es el doble del ángulo formado por los dos ejes, con el sentido que va del primer eje al segundo.

219. Descomposición de una traslación en producto de simetrías.

Toda traslación se puede descomponer en producto de dos simetrías de ejes perpendiculares al vector que define la traslación. De ellos puede fijarse arbitrariamente uno.

Sea (fig. 68) una traslación T definida por el vector libre $\{\overrightarrow{A\,A''}\}$. Sea e una recta arbitraria perpendicular a $A\,A''$. Tracemos otra perpendicular e' a una distancia de e que sea la mitad del módulo de $\overrightarrow{A\,A''}$ y en el mismo sentido que éste. Según se demostró en el número anterior, el producto de las simetrías de ejes e y e' equivale a la traslación T.

Podíamos haber comenzado por fijar e', tomando luego e a distancia mitad del módulo de $\overrightarrow{A\,A''}$, y en sentido opuesto al de éste.

220. Descomposición de un giro en producto de simetrías.

Todo giro se puede descomponer en producto de dos simetrías, cuyos ejes pasan por el centro del giro y uno de los cuales se puede fijar arbitrariamente.

Sea un giro G de centro O y amplitud $\alpha = A\,O\,A''$ (fig. 69). Sea e una recta arbitraria que pasa por O. Tracemos por éste otra recta e' que forme con e un ángulo igual a la mitad del α y de su mismo sentido. Según se demostró en el número 218, el producto de las dos simetrías de ejes e y e' es igual al giro G.

Podíamos haber empezado fijando e', tomando luego e en sentido contrario al de α.

221. Producto de una traslación por un giro.

Sea la traslación T definida por el vector $\mathbf{v}$ y el giro G de centro O y amplitud α (fig. 70). Queremos obtener el producto $G\,T$.

Para ello descomponemos T en el producto de dos simetrías S y S' de ejes e y e', paralelos y elegido el último de modo que pase por O. Descomponemos también G en el producto de las simetrías S' y S'', de ejes e' (determinado anteriormente) y e''. Tenemos

$$T = S' \cdot S \quad ; \quad G = S''\,S'$$

Luego

$$G \cdot T = S'' \cdot S' \cdot S' \cdot S = S'' \cdot S'^2 \cdot S$$

Pero $S'^2 = 1$, por ser la simetría transformación involutoria (número 214). O sea:

$$G \cdot T = S'' \cdot S$$

El producto de las simetrías S y S'', de ejes e y e'' que se cortan en O', equivale a un giro único de centro O' y amplitud $2 \cdot \frac{\alpha}{2} = \alpha$.

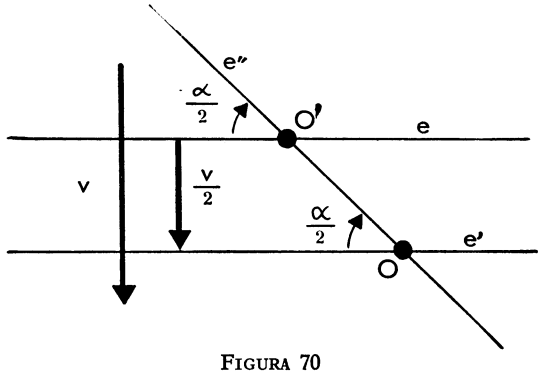


FIGURA 70

Por tanto:

El producto de una traslación por un giro es otro giro de amplitud igual a la del giro dado.

222. Producto de un giro por una traslación.

Ahora se trata de hallar $T \cdot G$. Descomponemos G en el producto de las simetrías S y S', de ejes e y e', siendo este último perpendicular desde O al vector $\mathbf{v}$. Por tanto, el eje e se toma a partir de e' en sentido contrario al de α (fig. 71). Descomponemos también T en el

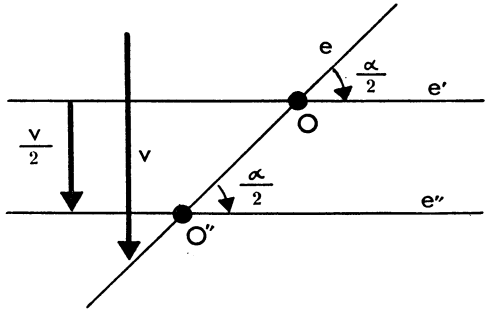


FIGURA 71

producto de las simetrías S' y S'', de ejes e' (determinado anteriormente) y e''. Por tanto

$$T \cdot G = S'' \cdot S' \cdot S' \cdot S = S'' \cdot S'^2 \cdot S = S'' \cdot S$$

El producto de las simetrías S y S'', de ejes e y e'', que se cortan en O'', equivale a un giro único de centro O'' y amplitud $2 \cdot \frac{\alpha}{2} = \alpha$.

Observa que la amplitud del giro $G \cdot T$ es la misma que la del giro $T \cdot G$, pero el centro es distinto. Luego, en general

$$T \cdot G \neq G \cdot T$$

El producto de un giro por una traslación es otro giro de amplitud igual a la de aquél.

223. Producto de dos giros.

Sean el giro G de centro O y amplitud α (fig. 72) y el giro G', de centro O' y amplitud α'.

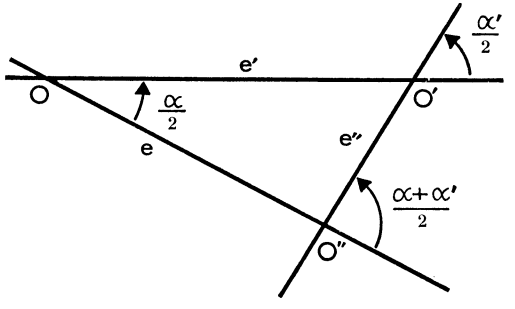


FIGURA 72

Descomponemos el giro G en las simetrías S y S', de ejes e y e', este último coincidente con $O\,O'$. Por tanto, fijado e', llevaremos a partir de él el eje e en sentido contrario al de α.

Igualmente descomponemos el giro G' en las simetrías S' y S'' de ejes e' y e'', el primero ya determinado anteriormente. Tendremos así:

$$G' \cdot G = S'' \cdot S' \cdot S' \cdot S = S'' \cdot S'^2 \cdot S = S'' \cdot S$$

Si los ejes e y e'' no son paralelos, el producto $S \cdot S''$ equivale a un giro único de centro O'' y amplitud $\alpha + \alpha'$. Pero si $\alpha + \alpha' = 0$, los ejes e y e'' son paralelos, y el producto $S \cdot S''$ equivale a una traslación.

El producto de dos giros, de amplitudes α y α', respectivamente, es otro giro de amplitud $\alpha + \alpha'$, cuando $\alpha + \alpha' \neq 0$, y una traslación cuando $\alpha + \alpha' = 0$.

224. El grupo de los movimientos directos.

A los giros y traslaciones se les llama *movimientos directos* porque conservan la orientación.

Sean M y M' dos movimientos directos, y veamos cuáles son las propiedades de su producto:

I. *El producto de dos movimientos directos es otro movimiento directo,* según se deduce de los teoremas anteriores, o sea

$$M' \cdot M = M''$$

II. *Propiedad asociativa:*

$$M''(M'M) = (M''M')M$$

por tratarse de transformaciones puntuales (núm. 203).

III. *Existe elemento neutro del producto:* es la identidad 1, verificándose

$$M \cdot 1 = 1 \cdot M = M$$

IV. A todo movimiento M le corresponde otro *inverso* M^{-1} tal que

$$M^{-1} \cdot M = 1$$

En efecto, si M es una traslación definida por el vector libre $\mathbf{v}$, M^{-1} es la traslación definida por $-\mathbf{v}$; y si M es el giro de centro O y amplitud α, M^{-1} es el giro de mismo centro O y amplitud $-\alpha$.

En virtud de estas cuatro condiciones podemos enunciar:

El conjunto de todos los movimientos directos de un plano forma un grupo, llamado de los movimientos directos.

Este grupo no es abeliano, pues se ha visto en el ejemplo del número 222 que el producto de dos movimientos no goza en general de la propiedad conmutativa.

225. El grupo de los movimientos.

Ahora estamos en condiciones de dar una definición rigurosa del concepto matemático de *movimiento.*

Se llama *movimiento* al producto de cualquier número de traslaciones, giros y simetrías; se llama *movimientos inversos* a las simetrías.

Diremos que dos figuras son *congruentes* o *iguales* cuando son correspondientes en un movimiento.

Son *directamente congruentes* cuando se corresponden en un movimiento directo; son *inversamente congruentes* cuando se corresponden en un movimiento inverso.

Todo movimiento es igual a un movimiento directo o al producto de un movimiento directo por una simetría.

En efecto, sea el movimiento $T_n \dots T_3 T_2 T_1$, donde cada T_i es una traslación, un giro o una simetría. Cada giro o traslación puede descomponerse en producto de dos simetrías, y sustituyendo de este modo todos los giros y traslaciones resulta

$$T_n \dots T_3 T_2 T_1 = S_r S_{r-1} \dots S_4 S_3 S_2 S_1$$

Si r es par, será

$$T_n \dots T_3 \cdot T_2 \cdot T_1 = (S_r S_{r-1}) \dots (S_4 S_3) \cdot (S_2 S_1)$$

donde cada paréntesis es un movimiento directo, y el producto de todos ellos igualmente.

Si r es impar, queda

$$T_n \dots T_3 T_2 T_1 = S_r (S_{r-1} S_{r-2}) \dots (S_4 S_3) \cdot (S_2 S_1) = S_r M$$

donde M es un movimiento directo.

Veamos ahora las propiedades del producto de movimientos:

I. *El producto de dos movimientos es otro movimiento.*

II. *Propiedad asociativa,* por tratarse de transformaciones puntuales.

III. *Elemento neutro:* la identidad.

IV. Todo movimiento T tiene otro *inverso* T' tal que $T' \cdot T = 1$. En efecto, si el movimiento es directo se demostró antes. Si T es inverso, puede ponerse en la forma $S \cdot M$, siendo M un movimiento directo y S una simetría. Pues bien, su inverso será $T' = M^{-1} S$

$$T' \cdot T = M^{-1} \cdot S \cdot S \cdot M = M^{-1} \cdot S^2 \cdot M = M^{-1} \cdot M = 1$$

En virtud de estas cuatro propiedades podemos enunciar:

El conjunto de todos los movimientos de un plano es un grupo, llamado de los movimientos, del cual es un subgrupo el grupo de los movimientos directos.

El conjunto de los movimientos inversos no forman grupo, pues el producto de dos movimientos inversos es uno directo.

EJERCICIOS

1. ¿Cuál es la transformación producto de dos simetrías axiales de ejes perpendiculares?
2. ¿Cuál es el producto de una simetría central por otra axial cuyo eje pasa por el centro de la primera?
3. ¿Qué transformación cambia un segmento AB en otro paralelo a él, de la misma magnitud y sentido contrario? ¿Y del mismo sentido?
4. ¿Cuáles son los ejes y centro de simetría del rectángulo, rombo y cuadrado?
5. Si G es un giro de centro O y S una simetría respecto a un eje que pasa por O, demuestra que

$$SGS = G^{-1}$$

siendo G^{-1} el giro inverso de G.

6. Demuestra que el producto de dos simetrías centrales respecto de dos centros O_1 y O_2 es una traslación equivalente al producto de dos traslaciones iguales a $O_1 O_2$.
7. ¿Qué es el producto de $2n$ simetrías centrales?
8. ¿Qué es el producto de $2n + 1$ simetrías centrales?
9. Un arriero tiene que ir de un punto A a otro B, situados a un mismo lado de un arroyo rectilíneo r y abrevar su caballería en él durante el trayecto. Hallar el camino más corto que debe seguir (fig. 73).

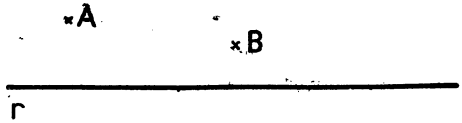


FIGURA 73

10. Dados dos puntos A y B y una recta r, determinar un punto P sobre esta recta tal que la diferencia $PB - PA$ sea máxima en valor absoluto.
    a) Cuando están A y B a distinto lado de r.
    b) Cuando están al mismo lado de r.
11. Hallar el camino que debe seguir una bola de billar para dar con otra después de chocar con las cuatro bandas en un orden dado.
12. Dada una recta CD y dos puntos A y B situados al mismo lado de ella, determinar en CD un punto P tal que al unirlo con A y B se forme el ángulo CPA doble del DPB.

Construir un triángulo y discutir el número de soluciones con los datos siguientes:

13. Dirección y posición de las tres bisectrices interiores y un punto P que se sabe que está en uno de los lados.
14. a, $b + c$, h_b.
15. a, A, $b + c$.
16. a, A, $b - c$.
17. a, b, m_c.

18. Sean los dos cuadrados $O\,A\,B\,C$ y $O\,A\,M\,N$, siendo $O(0, 0)$, $A(a, 0)$, $B(a, a)$, $C(0, a)$, $M(a, -a)$ y $N(0, -a)$. ¿Cuál es el movimiento que transforma el segundo cuadrado en el primero con el único punto doble O? Define dicho movimiento por sus elementos fundamentales. Haz la descomposición de dicho movimiento en el producto de una simetría central de centro O seguida de un giro G, determinando sus elementos (centro y amplitud).

19. Los puntos A, B, C, D y E son cinco vértices consecutivos de un exágono regular. Los lados $A\,B$, $B\,C$, $C\,D$ y $D\,E$ son, respectivamente, los ejes de las simetrías axiales S_1, S_2, S_3 y S_4. Estudia la transformación producto

$$T = S_4 \cdot S_3 \cdot S_2 \cdot S_1$$

clasificándola y definiendo sus elementos fundamentales (en su caso, centro, eje, amplitud, etc.). En particular hallar las transformadas de las tangentes en B y D a la circunferencia circunscrita al exágono y del lado $B\,C$.

20. En un plano en el que se ha definido un sistema de ejes de coordenadas rectangulares $O\,X$ y $O\,Y$ se consideran cuatro simetrías axiales S_1, S_2, S_3 y S_4 cuyos ejes respectivos son las rectas (l_1) $y = 0$, (l_2) $y = x$, (l_3) $x = 0$, (l_4) $x = 4$. Se pide:

1.º Demostrar que el producto de dichas simetrías es un giro $S_4 \cdot S_3 \cdot S_2 \cdot S_1 = G$, del cual se pide el centro O_1 y la amplitud α.

2.º Hallar la ecuación de la figura transformada de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ por el giro $G(O_1, \alpha)$.

21. Se multiplica la simetría de eje $x = y$ por la de eje $x = 6$. ¿Qué clase de transformación se obtiene? Calcula los elementos determinantes de esta transformación y el punto homólogo del origen de coordenadas.

22. Sea una circunferencia de centro $C(0, 2)$ y radio 3.

1.º Determinar (analítica y gráficamente) el centro del giro igual al producto de dos simetrías axiales que transforman $C(0, 2)$ en $C'(5, 0)$, y este último punto en el $C''(5, -3)$.

2.º Determinar la circunferencia transformada de la primera en el giro.

21

RAZON SIMPLE. TEOREMAS DE MENELAO Y CEVA

226. Vectores deslizantes.

Consideremos todos los segmentos orientados o vectores de una línea recta. Tomemos sobre ella un origen O, y llamemos *abscisa* de un punto cualquiera de la misma a su distancia a dicho origen, precedida del signo + o —, según que esté el punto situado a uno u otro lado del origen.

Llamaremos *medida algébrica* de un vector sobre la recta a la abscisa del extremo del vector disminuida en la abscisa del origen.

Es decir, siendo a la abscisa del punto A y b la del punto B, la medida algébrica del vector $\overrightarrow{AB}$ es

$$\overline{AB} = b - a$$

Diremos que *dos vectores de la recta son iguales cuando tienen la misma medida,* o sea

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{A'B'}$$

Es fácil ver que ésta es una relación de equivalencia, pues tiene las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. Por tanto, clasifica los vectores de la recta en *clases de equivalencia,* que se llaman *vectores deslizantes.*

A cada vector deslizante se asocia su medida algébrica, y se puede definir una adición de vectores deslizantes y una multiplicación por un número real. Esto nos hace ver que el conjunto de los vectores deslizantes constituye un *espacio vectorial.*

Así se define, por ejemplo,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Suma de dos vectores deslizantes es el que tiene como medida la suma de las medidas de los dos vectores dados.

227. Razón de dos vectores deslizantes.

Llamaremos *razón de dos vectores deslizantes* a la razón de sus medidas algébricas. Por tanto, dicha razón es positiva o negativa según que las medidas sean del mismo o de distinto signo.

228. Razón simple de tres puntos alineados.

Dados tres puntos M, A y B sobre una recta, se llama *razón simple* entre los mismos, y se representa por $(M\,A\,B)$, a la razón entre los vectores $\overrightarrow{MA}$ y $\overrightarrow{MB}$, y, por tanto, a la razón entre sus medidas

$$(M\,A\,B) = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \lambda$$

Para simplificar, en adelante representaremos sencillamente por MA la medida del vector $\overrightarrow{MA}$.

229. Variación de la razón simple.

1. Si M está a la izquierda de A (fig. 74):

$$\lambda = \frac{M_1A}{M_1B} = \frac{M_1B - AB}{M_1B} = 1 - \frac{AB}{M_1B}$$

Si M_1 coincide con A, $\lambda = 0$. Cuando M_1 se aleja, M_1B crece y $\dfrac{AB}{M_1B}$ disminuye, por lo que $\lambda \to 1$.

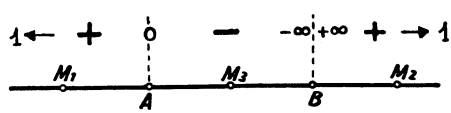


FIGURA 74

2. Si M permanece a la derecha de B,

$$\lambda = \frac{M_2A}{M_2B} = \frac{M_2B + BA}{M_2B} = 1 + \frac{BA}{M_2B}.$$

Si M_2 coincide con B, $M_2B = 0$ y $\lambda = \infty$. Cuando M_2 se aleja, M_2B crece y $\dfrac{BA}{M_2B}$ disminuye, luego $\lambda \to 1$.

3. Si M está comprendido entre A y B,

$$\lambda = \frac{M_3 A}{M_3 B} = \frac{B A - B M_3}{M_3 B} = \frac{B A + M_3 B}{M_3 B} = 1 - \frac{A B}{M_3 B}$$

y λ es siempre negativo.

Al alejarse M_3 de A, $M_3 B$ disminuye y $\frac{A B}{M_3 B}$ crece indefinidamente, luego $\lambda \to -\infty$.

Existe, por tanto, una correspondencia biunívoca entre los valores de λ y la posición de M, lo que nos permite considerar a la razón simple como abscisa del punto M en un sistema en que A y B son puntos fundamentales, de modo que a cada posición de M con respecto a ellos corresponde un valor de la razón simple y viceversa.

El número $\lambda = (M\,A\,B)$ se denomina *coordenada baricéntrica* de M con respecto a los puntos A y B de referencia.

Para la construcción gráfica de λ basta aplicar la teoría de proporcionalidad de segmentos (Teorema de Thales). En la figura 75 aparece la construcción si $\lambda = -\frac{2}{3}$

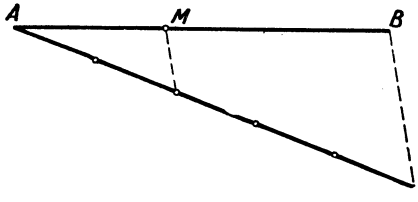


FIGURA 75

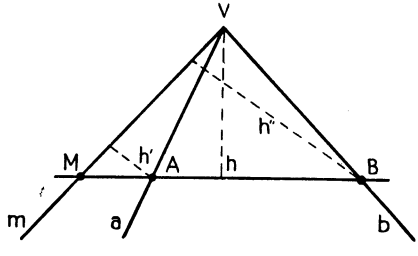


FIGURA 76

230. Razón simple de tres rectas concurrentes.

Dadas tres rectas concurrentes m, a y b (fig. 76) se llama *razón simple* de las mismas, y se representa por $(m\,a\,b)$, al cociente

$$(m\,a\,b) = \frac{\text{sen } (m\,a)}{\text{sen } (m\,b)}$$

llamando $(m\,a)$ al ángulo convexo que forman las rectas m y a, y $(m\,b)$ al ángulo convexo que forman las rectas m y b, conviniendo

asimismo en atribuir signos iguales o distintos a los ángulos, según que sean del mismo o de opuesto sentido.

Cortando las tres rectas dadas por otra cualquiera MB, se obtienen los puntos M, A y B, y veamos qué relación existe entre la razón simple de rectas y la de puntos.

El doble del área del triángulo MVA puede expresarse de las dos formas siguientes (fig. 76):

$$MA \cdot h = MV \cdot h'$$

Pero $h' = AV \operatorname{sen}(m\,a)$. Luego

$$MA \cdot h = MV \cdot AV \operatorname{sen}(m\,a) \qquad [1]$$

Entenderemos siempre a lo largo de este libro por *producto de dos segmentos* el de sus medidas, halladas con una misma unidad.

Del mismo modo para el triángulo MVB:

$$MB \cdot h = MV \cdot BV \operatorname{sen}(m\,b) \qquad [2]$$

Dividiendo [1] y [2], resulta

$$\frac{MA \cdot h}{MB \cdot h} = \frac{MV \cdot AV \operatorname{sen}(m\,a)}{MV \cdot BV \operatorname{sen}(m\,b)}$$

o sea

$$\frac{MA}{MB} = (\mathbf{MAB}) = \frac{\mathbf{AV}}{\mathbf{BV}}\ (\mathbf{m\,a\,b})$$

La razón simple de tres puntos es igual a la razón simple de los tres rayos que los proyectan desde un punto cualquiera, multiplicada por la relación de distancias desde el vértice de proyección a los dos puntos de referencia A *y* B.

231. Abscisa del punto de división de un segmento en una razón λ.

Sea x la abscisa del punto M_3, a la del punto A, y b la del punto B (fig. 74). Será

$$\lambda = \frac{M_3 A}{M_3 B} = \frac{a - x}{b - x}$$

o sea:

$$\lambda b - \lambda x = a - x$$
$$a - \lambda b = x - x\lambda = x(1 - \lambda)$$

y por tanto

$$\mathbf{x = \frac{a - \lambda b}{1 - \lambda}}$$

232. Teorema de Menelao.

Dado un triángulo A B C (fig. 77) *y una recta* r *que no pase por ningún vértice, que corte a* A B *en* M, *a* A C *en* N *y a* B C *en* P, *se verifica la relación:*

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{PB}{PC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$$

Construimos una recta *s* cualquiera, no paralela a *r*, ni a cualquier lado del triángulo, y proyectamos sobre ella los vértices *A*, *B*, *C* paralelamente a *r*.

Se tiene, por el teorema de Thales,

$$\frac{MA}{MB} = \frac{OA'}{OB'}; \qquad \frac{PB}{PC} = \frac{OB'}{OC'}.$$

$$\frac{NC}{NA} = \frac{OC'}{OA'}$$

Y multiplicando las tres igualdades, se tiene lo que deseábamos demostrar.

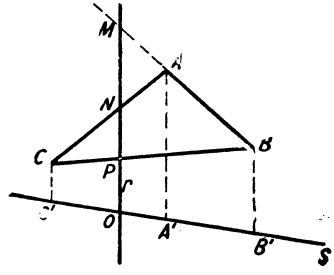


FIGURA 77

RECÍPROCO: *Si en los lados del triángulo* A B C *existen tres puntos* M, N *y* P *que cumplen la anterior relación, dichos puntos están alineados.* En efecto, la recta *M N* corta a *B C* en *P'*, que coincide con *P*, pues ambos dividen a *B C* en la misma razón.

233. Teorema de Ceva.

Si se tiene un triángulo A B C *y un punto* O *que se une con los vértices, estas tres rectas* O A, O B, O C *cortarán a los lados en los puntos* M, N *y* P, *tales que*

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{PB}{PC} \cdot \frac{NC}{NA} = -1$$

Consideremos el triángulo $A\,B\,P$ cortado por la transversal $C\,M$. (fig. 78). Aplicando el teorema de Menelao, resulta:

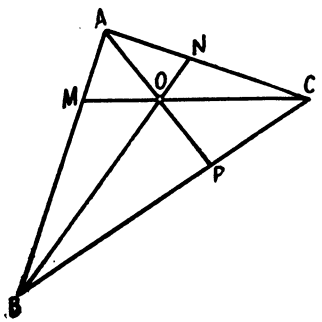


FIGURA 78

$$\frac{M\,A}{M\,B}\cdot\frac{C\,B}{C\,P}\cdot\frac{O\,P}{O\,A}=1$$

Operando análogamente con el triángulo $A\,C\,P$, cortado por la transversal $B\,N$, se tendrá:

$$\frac{O\,A}{O\,P}\cdot\frac{B\,P}{B\,C}\cdot\frac{N\,C}{N\,A}=1$$

Multiplicando las dos igualdades y simplificando, se tiene:

$$\frac{M\,A}{M\,B}\cdot\frac{C\,B}{C\,P}\quad\frac{B\,P}{B\,C}\quad\frac{N\,C}{N\,A}=1$$

o sea

$$\frac{M\,A}{M\,B}\cdot\frac{B\,P}{C\,P}\cdot\frac{N\,C}{N\,A}\cdot\frac{C\,B}{B\,C}=1$$

y como $B\,C=-\,C\,B$

$$\frac{M\,A}{M\,B}\cdot\frac{P\,B}{P\,C}\quad\frac{N\,C}{N\,A}=-\,1$$

RECÍPROCO: *Si en los lados del triángulo* A B C *existen tres puntos* M, N *y* P *que cumplen la anterior relación, los segmentos que resultan de unirlos con los vértices opuestos concurren en un punto.*

Basta considerar los segmentos $A\,P$ y $B\,N$ que concurren en el punto O. Trazando $C\,O$, ésta cortará a $A\,B$ en M', que coincide con M, pues ambos dividen a $A\,B$ en la misma razón simple.

234. Ejemplos.

1) *Baricentro:* Las medianas de un triángulo se cortan en un punto. Pues en virtud del recíproco del teorema de Ceva:

$$\frac{M\,A}{M\,B}=\frac{P\,B}{P\,C}=\frac{N\,C}{N\,A}=-\,1$$

y su producto es — 1.

2) *Incentro:* Las bisectrices se cortan en un punto. Pues

$$\frac{MA}{MB} = -\frac{b}{a}. \qquad \frac{PB}{PC} = -\frac{c}{b}. \qquad \frac{NC}{NA} = -\frac{a}{c}$$

y el producto es — 1.

235. Aplicaciones.

EJEMPLO 1.—*Si sobre los dos catetos de un triángulo rectángulo* A B C *se construyen dos cuadrados, las rectas* B Q *y* C P (fig. 79) *se cortan sobre la altura* A D. *Demostrarlo.*

Basta demostrar que las rectas PM, AD y QR son concurrentes.

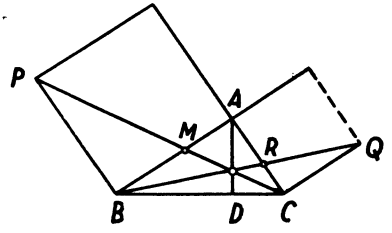


FIGURA 79

Aplicando el teorema del cateto a BA y AC, tenemos

$$AB^2 = BC \cdot DB$$
$$AC^2 = BC \cdot DC$$

dividiendo estas dos igualdades

$$\frac{AB^2}{AC^2} = -\frac{DB}{DC} \qquad [1]$$

(pues DB y DC tienen signo contrario) y de los pares de triángulos semejantes ABR con CRQ y BMP con AMC se obtiene

$$\frac{RC}{RA} = \frac{CQ}{AB} \qquad \frac{MA}{MB} = \frac{AC}{PB}$$

y como $CQ = AC$; $PB = AB$

$$\frac{RC}{RA} = \frac{AC}{AB} \qquad \frac{MA}{MB} = \frac{AC}{AB}$$

Multiplicando ordenadamente la igualdad [1] por las dos últimas, se tiene, teniendo en cuenta el signo:

$$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{RC}{RA} \cdot \frac{MA}{MB} = -1 \qquad \text{c. q. d.}$$

EJEMPLO 2.—*Dado un triángulo* A B C, *se trazan las tres cevianas (rectas concurrentes)* A α, B β, C γ, *que se cortan en* O; *la circunferencia que pasa por* α, β, γ, *cortará a los lados del triángulo en otros puntos* α', β', γ'; *que, unidos con* A, B *y* C, *dan otras tres cevianas. Demostrarlo* (fig. 80).

Tenemos por hipótesis:

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = -1 \qquad [2]$$

y teniendo en cuenta la expresión de la potencia de A, B y C respecto a la circunferencia que pasa por α, α', β, β', γ, γ':

$$\begin{aligned} A\gamma \cdot A\gamma' &= A\beta \cdot A\beta' \\ B\alpha \cdot C\alpha' &= B\gamma \cdot B\gamma' \\ C\beta \cdot C\beta' &= C\alpha \cdot C\alpha' \end{aligned}$$

Multiplicando las tres igualdades y pasando todo al primer miembro:

$$\frac{A\gamma \cdot A\gamma' \cdot B\alpha \cdot B\alpha' \cdot C\beta \cdot C\beta'}{A\beta \cdot A\beta' \cdot B\gamma \cdot B\gamma' \cdot C\alpha \cdot C\alpha'} = -1$$

y dividiendo por la igualdad [2] resulta:

$$\frac{A\gamma'}{B\gamma'} \cdot \frac{B\alpha'}{C\alpha'} \cdot \frac{C\beta'}{A\beta'} = -1$$

es decir, que $A\alpha'$, $B\beta'$ y $C\gamma'$ son concurrentes.

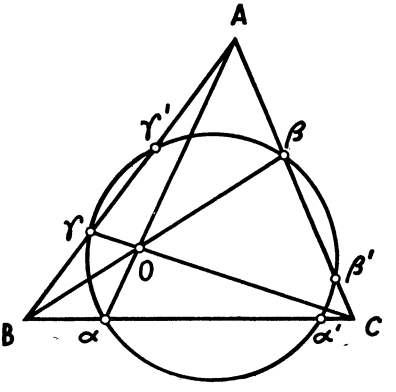


FIGURA 80

EJERCICIOS

1. Las rectas que unen los vértices de un triángulo con los puntos en que los lados opuestos son tangentes al círculo inscrito, son concurrentes.
2. Por el punto de intersección P de dos círculos secantes se trazan dos cuerdas rectangulares, que cortan a los círculos en B, C, B'. C'. Demuestra la relación
$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$
3. Una transversal D corta los lados de un triángulo ABC en α, β, γ. Se toman sobre ella los simétricos de dichos puntos con respecto a un punto O arbitrario, α', β', γ'. Demuestra que las rectas $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ son concurrentes.
4. En un cuadrilátero inscriptible, $ABCD$, si se trazan dos rectas simétricas con respecto a la bisectriz del ángulo A (AM, AQ) hasta cortar los lados BC y CD, las proyecciones de los puntos M y Q sobre los lados AB y AD están en línea recta con el punto medio de DB. Demuéstralo.
5. Dado un triángulo ABC y las cevianas $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, se toman α', β', γ', puntos medios de las cevianas. Demuestra que $A'\alpha'$, $B'\beta'$,, $C'\gamma'$ son también cevianas en el triángulo formado por los puntos medios de los lados; dichas cevianas se cortan o son paralelas.
6. Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos tales, que perpendiculares trazadas de los vértices de ABC sobre los lados del $A'B'C'$ son concurrentes. Demuestra que las perpendiculares trazadas de A', B', C' sobre los lados del ABC son también concurrentes. *(Aplica el teorema de Ceva en forma trigonométrica teniendo en cuenta la ley del seno.)*

7. Si desde un punto de una circunferencia se trazan perpendiculares a los tres lados de un triángulo inscrito en la misma circunferencia, los pies de dichas perpendiculares están en línea recta. Demuéstralo.

8. Sobre un segmento $A\,B$, de 64 mm. de longitud, determina la posición del punto M que lo divide en la razón $\lambda = -\frac{3}{2}$.

9. Dado un segmento $A\,B$ de longitud igual a m, determina la posición del punto M que lo divide en la razón

$$\lambda = \frac{p^2 - q^2}{p^2 - 1}$$

siendo $q > p > 1$. Aplicación al caso en que $q^2 - p^2 = p^2 - 1$, y por tanto $\lambda = -1$.

10. Dados los puntos A y B, de abscisas 3 y 11 respectivamente, halla la de un punto M, situado entre ambos, tal que la longitud del segmento $A\,M$ sea la cuarta parte de la del segmento $A\,B$.

22

LA HOMOTECIA EN EL PLANO

236. Definición y propiedades.

Dado un punto O y un número real $k \neq o$, *se llama* HOMOTECIA *a la transformación que hace corresponder a un punto* A *otro* A', *alineado con* A *y con* O, tal que

$$(O\,A'\,A) = \frac{O\,A'}{O\,A} = k$$

Si $k > o$, A y A' están del mismo lado que O; si $k < o$, A y A' están a distinto lado. En el primer caso la homotecia se denomina *directa;* en el segundo, *inversa.*

Al punto O se le llama *centro de homotecia,* y a k, *razón de la homotecia.*

Los homólogos de los puntos A, B, C, ..., *situados sobre una recta* r, *están sobre otra recta* r', *paralela a* r, *y en el mismo orden* (fig. 81).

En efecto, esto es simple consecuencia del teorema de Tales, pues por hipótesis

$$\frac{O\,A'}{O\,A} = \frac{O\,B'}{O\,A} = \frac{O\,C'}{O\,C} = \ldots = k$$

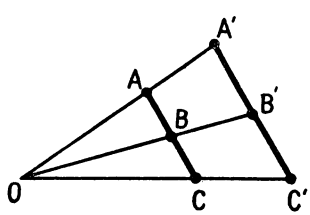


FIGURA 81

Luego $A'\,B'$ es paralelo a $A\,B$, y $B'\,C'$ es paralelo a $B\,C$, pero como por B' no pasa más que una paralela a $A\,C$, resulta que A', B' y C' están en línea recta.

La razón de dos segmentos homólogos es igual a la razón de homotecia. En efecto, según el teorema de Tales

$$\frac{A'\,C'}{A\,C} = \frac{O\,A'}{O\,A} = \frac{O\,C'}{O\,C} = k$$

Al centro de homotecia O le corresponde el mismo punto O en la transformación. *Es el único punto doble.* Ya que si $O\,A = o$, es $O\,A' = k \cdot O\,A = k \cdot o = o$.

A la recta $O\,A$, que pasa por O, le corresponde $O\,A'$, es decir, ella misma. Luego, *toda recta que pasa por* O *es doble en la homotecia.*

Si $k = 1$, la homotecia se convierte en la identidad. Si $k = -1$, tenemos la simetría central.

237. Figuras homotéticas.

Se llaman así aquellas cuyos puntos se corresponden en una homotecia.

Del número anterior se deduce que dos figuras homotéticas tienen sus *lados paralelos* y sus *ángulos iguales* (fig. 82). Recordamos que éstas son las condiciones para que dos figuras sean *semejantes.* Luego:

Dos figuras homotéticas son semejantes.

Demostraremos el siguiente teorema referente a los *triángulos homotéticos:*

Si dos triángulos, que no son iguales, tienen sus lados respectivamente paralelos, son homotéticos.

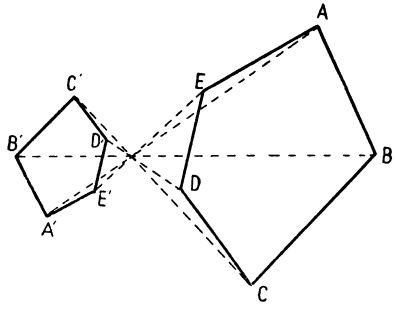


FIGURA 82

En efecto, las rectas $A\,A'$ y $B\,B'$ se cortan en un punto O tal que (fig. 83)

$$\frac{O\,B'}{O\,B} = \frac{O\,A'}{O\,A} = \frac{A'\,B'}{A\,B} = k \quad [1]$$

llamando k la razón de semejanza de los dos triángulos (primer criterio de semejanza de triángulos).

Por la misma razón $B\,B'$ y $C\,C'$ se cortan en un punto O' tal que

$$\frac{O'\,B'}{O'\,B} = \frac{O'\,C'}{O'\,C} = \frac{B'\,C'}{B\,C} = k \quad [2]$$

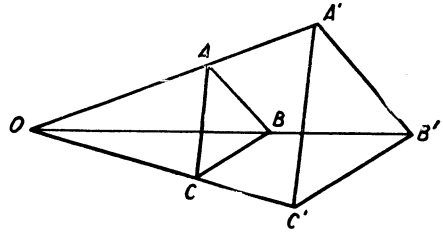


FIGURA 83

De las igualdades [1] y [2] se deduce

$$\frac{O\,B'}{O\,B} = \frac{O'\,B'}{O'\,B} = k$$

Pero sólo existe un punto de la recta BB' cuya razón de distancias a los puntos B y B', valga k. Luego O y O' coinciden en el centro de homotecia de razón k.

Lo mismo sucede con dos figuras cualesquiera, de lados respectivamente paralelos, ya que se podrán descomponer en triángulos que cumplan la condición anterior.

Si $k = 1$, el punto O se aleja al infinito, y tenemos el caso de la traslación.

238. Grupo de las homotecias con el mismo centro.

Si aplicamos a una figura dos homotecias consecutivas con el mismo centro O, veamos cuál es la transformación resultante. Si por la primera homotecia A se transforma en A', según la relación

$$\frac{OA'}{OA} = k \qquad [3]$$

y por la segunda homotecia A' se transforma en A'' en virtud de la fórmula

$$\frac{OA''}{OA'} = k' \qquad [4]$$

multiplicando [3] y [4] se obtiene

$$\frac{OA''}{OA} = kk' = k''$$

Esta relación nos indica que se pasa de A a A'' por medio de otra homotecia, de mismo centro O, y de razón el producto de las razones.

O sea: *todas las homotecias con el mismo centro forman grupo, al que pertenecen la identidad y la simetría central.*

239. Producto de dos homotecias con distinto centro.

Si por una homotecia de centro O_1, y razón k_1 (fig. 84) transformamos $\overline{AB}$ en $\overline{A'B'}$, y por otra de centro O_2 y razón k_2 se transfor-

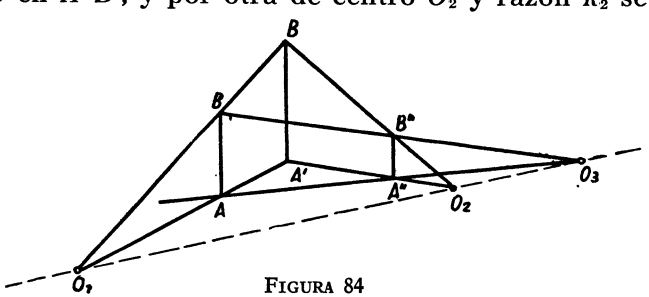


FIGURA 84

ma $\overline{A'B'}$ en $\overline{A''B''}$, ¿qué clase de transformación hará pasar directamente de AB a $A''B''$?

Siendo $A''B''$ y AB paralelas, por serlo ambas con $A'B'$, deberán ser homotéticas (núm. 237). Además

$$k_3 = \frac{A''B''}{AB} = \frac{A''B''}{A'B'} \cdot \frac{A'B'}{AB} = k_1 k_2$$

Luego es una homotecia de razón $k_1 k_2$. ¿Dónde estará su centro?

La recta $O_1 O_2$ ha permanecido invariante en la primera transformación por pasar por su centro O_1; y también en la segunda, por pasar por O_2, luego permanece invariante en la transformación producto. De aquí que, necesariamente, pase por el centro de la nueva homotecia.

Resumiendo: *El producto de dos homotecias de distinto centro es otra homotecia cuyo centro está alineado con los otros dos, y su razón es el producto de las dos razones. El producto de dos homotecias es una traslación en el caso particular en que* $k_1 k_2 = 1$.

Por eso las homotecias de distinto centro no forman grupo. Lo forman, en cambio, el conjunto de las homotecias y de las traslaciones del plano.

240. Homotecias entre dos circunferencias.

Como en una homotecia, a distancias iguales en una figura corresponden distancias iguales en su transformada, resulta que *la figura homotética de una circunferencia es otra circunferencia.* Pues a puntos que equidistan de uno corresponden puntos que equidistan de su homólogo.

Sean las circunferencias de radios r y r' y centros O y O'. Se construye el radio OA y, paralelamente a él, los radios opuestos $O'A'$

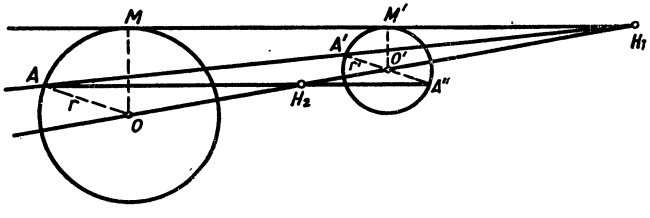


FIGURA 85

y $O'A''$ (fig. 85). Unamos A con A' y O con O' y llamemos H_1 el punto de intersección de las dos rectas. Del mismo modo llamemos H_2 el punto de intersección de $A\,A''$ con $O\,O'$.

Se ve en la figura que se cumple la relación:

$$\frac{H_1 A}{H_1 A'} = \frac{H_1 O}{H_1 O'} = \frac{r}{r'} \qquad [5]$$

Si repetimos la misma construcción con otro punto cualquiera B de la circunferencia, obtenemos análogamente, llamando H'_1 y H'_2 los puntos de intersección de $B\,B'$ y $B\,B''$, respectivamente, con la línea de los centros $O\,O'$:

$$\frac{H'_1 B}{H'_1 B'} = \frac{H'_1 O}{H'_1 O'} = \frac{r}{r'} \qquad [6]$$

Luego de [5] y [6] se deduce

$$\frac{H_1 O}{H_1 O'} = \frac{H'_1 O}{H'_1 O'} = \frac{r}{r'}$$

Pero sólo existe un punto de la recta $O\,O'$ cuya razón de distancia a los puntos O y O' valga $\frac{r}{r'}$. Luego H_1 y H'_1 coinciden en el *centro de homotecia directa* de las dos circunferencias.

Del mismo modo se demuestra que

$$\frac{H_2 A}{H_2 A''} = \frac{H_2 O}{H_2 O'} = -\frac{r}{r'} = \frac{H'_2 B}{H'_2 B''} = \frac{H'_2 O}{H'_2 O'}$$

Luego H_2 y H'_2 coinciden en el *centro de homotecia inversa* de las dos circunferencias.

Hemos demostrado con esto que *dos circunferencias cualesquiera son siempre homotéticas según dos homotecias, una directa y otra inversa.*

Los puntos H_1 y H_2 son los centros de homotecia, el primero de razón positiva *(centro de homotecia directa)*, y el segundo de razón negativa *(centro de homotecia inversa)*. Además la posición de los puntos H_1 y H_2 no depende para nada del punto A elegido, pues en la relación citada no interviene dicho punto. Dependen tan sólo de los radios r y r' y de los centros O, O'.

Una forma sencilla de determinar H_1 es construir la tangente

común exterior hasta que corte a la línea de los centros. Esto se debe a que, por ser OM y $O'M'$ perpendiculares a dicha tangente, son paralelas entre sí y se puede poner: $\frac{H_1M}{H_1M'} = \frac{r}{r'}$; luego M y M' son homólogos en la homotecia que transforma O en O'. Como MM' y OO' son rectas dobles (unen puntos homólogos), su intersección nos dará el centro.

Con análogo razonamiento se demuestra que el otro centro H_2 es la intersección de OO' con la tangente común interior.

Si las circunferencias son concéntricas, resulta evidente que se puede transformar una en otra mediante una homotecia de centro el común a ambas, y razón, la de sus radios.

241. Centros de homotecia de tres circunferencias.

Sean tres circunferencias C_1, C_2, C_3, de centros O_1, O_2, O_3 (fig. 86). Supongamos que H_3 y H_3' son los dos centros que transforman C_1 en C_2, H_2 y H_2' los que transforman C_1 en C_3 y H_1 y H_1' los que transforman C_2 en C_3. Por una propiedad estudiada al hablar del grupo de las homotecias, los centros de las homotecias que transforman directamente C_1 en C_3 deben estar alineados con los otros centros. Es decir, que H_2 está alineado con H_1 y H_3, y H_2' alineado con H_3 y H_1'.

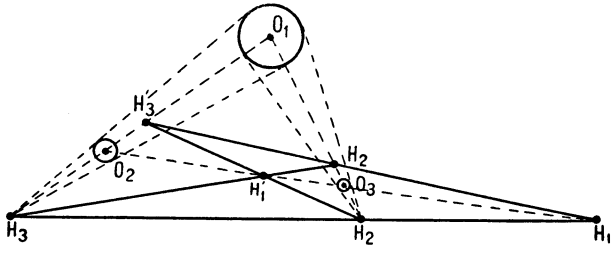


FIGURA 86

En otros términos: *Los seis centros de homotecia de tres circunferencias están alineados tres a tres.* Obsérvese en la figura que en una recta están los tres centros de razón positiva: H_1, H_2, H_3. En las otras, dos de razón negativa y uno de positiva. Esto es natural, pues el producto de dos homotecias de razón negativa es otra de razón positiva.

Llamaremos *ejes de homotecia* a aquellas rectas que sin pasar por los centros de las circunferencias, contienen tres centros de homotecia. Luego:

Los seis centros de homotecia de tres circunferencias están alineados en cuatro ejes de homotecia, cada uno de los cuales contiene tres centros de homotecia.

242. Aplicaciones del método de homotecias.

EJEMPLO 1.—*Por un punto* P *interior a una circunferencia* C *trazar una cuerda de ésta que quede dividida por el punto en una razón dada* — $\frac{m}{n}$.

Supongamos resuelto el problema (fig. 87). Vemos que la homotecia de centro P y razón — $\frac{m}{n}$ transforma un extremo N de la cuerda en otro N'. Por este último pasará, por tanto, la circunferencia C', homotética de la dada en la homotecia de centro P y razón — $\frac{m}{n}$. El problema se reduce, pues, a la construcción de C'.

Para ello se divide OP en m partes iguales, y a partir de P se toma el segmento $PO' = n$ de dichas partes. Se divide luego el radio OM en m partes iguales, y se toman n de dichas partes como radio $O'M'$ de C'. Las intersecciones de esta última con C resuelven el problema.

EJEMPLO 2.—*Dados dos triángulos* A B C *y* D E F, *inscribir en el primero un triángulo semejante al segundo.*

Tomemos un punto cualquiera F' de AC (fig. 88) y tracemos por él una paralela $F'D'$ a FD. Por D' y F' tracemos paralelas a DE y FE respectivamente. Obtenemos así un triángulo $F'D'E'$ semejante al FDE (primer criterio

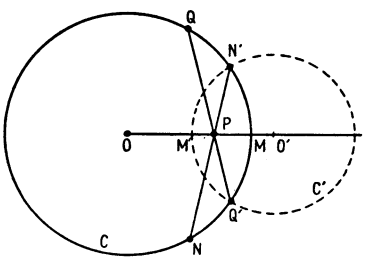


FIGURA 87

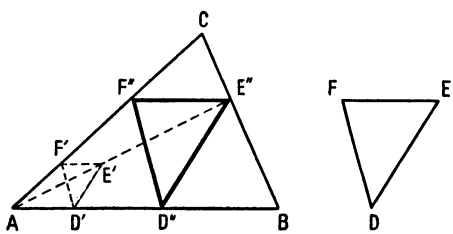


FIGURA 88

de semejanza). El triángulo $F''D''E''$, homotético del $F'D'E'$ respecto al centro A, resuelve el problema.

EJEMPLO 3.—*Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de una circunferencia que pasan por un punto fijo de la misma.*

Sea A el punto fijo (fig. 89), AB, AC, AD diversas cuerdas, siendo AC el diámetro que pasa por A.

Sean B', C', D', ..., los puntos medios respectivos. Se tendrá

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{AD}{AD'} = \frac{1}{2}$$

Luego B y B' son puntos homólogos de centro A y razón $\frac{1}{2}$, y lo mismo C y C', D y D', etc.

Y como B describe una circunferencia, B' describirá su homóloga en dicha homotecia. Esta será tangente a la primera en A y de radio mitad del de la primera.

EJEMPLO 4.—*Hallar el lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ve un segmento dado* A B *bajo un ángulo dado* α.

Dicho lugar se denomina *arco capaz del ángulo* α, y por tener aplicación frecuente en las lecciones próximas, recordaremos aquí su construcción.

En el extremo A del segmento dado AB (fig. 90) tracemos un ángulo

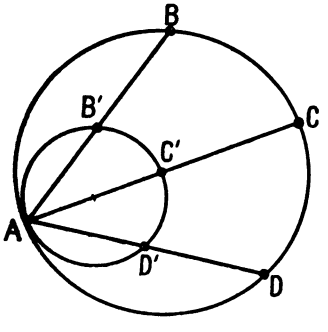


FIGURA 89

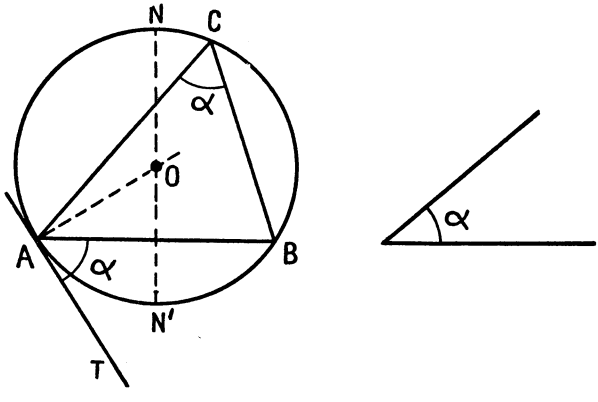


FIGURA 90

$BAT = \alpha$, y una perpendicular AO a AT. Construyamos en seguida la mediatriz NN' del segmento AB. Hagamos centro en O, intersección de NN' y AO, y con radio OA tracemos una circunferencia. El arco ANB es el lugar geométrico pedido, arco capaz del ángulo α. En efecto, todos los ángulos como el ACB, inscritos en dicho arco valen la mitad del arco $AN'B$; y lo mismo vale el ángulo $BAT = \alpha$, que es semiinscrito en el mismo arco. Luego $\widehat{ACB} = \alpha$.

El arco simétrico al $\widehat{ACB}$ respecto de la recta AB cumple la misma propiedad. Por tanto:

El lugar de los puntos de un plano desde los cuales se ve a un segmento dado A B *bajo un ángulo dado, está formado por los dos arcos capaces de dicho ángulo, cuyos extremos son los del segmento.*

EJEMPLO 5.—*Construir un triángulo, conocidos el lado* B C, *el ángulo opuesto* A, *y la mediana* m_c.

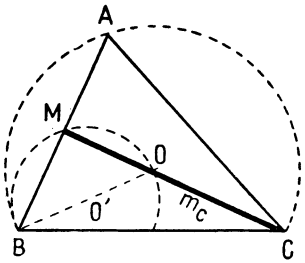


FIGURA 91

El vértice *A* estará situado sobre el arco capaz de dicho ángulo, construido sobre el lado *B C* (fig. 91). Supongamos el problema resuelto, y sea *M* el punto medio de *A B*. Dicho punto *M* estará sobre la circunferencia homotética del lugar de los puntos *A* en la homotecia de razón $\frac{1}{2}$ y centro *B* (ejemplo 3). Por otra parte *M* ha de estar sobre un arco de centro *C* y radio m_c. Luego la intersección de ambas líneas determina el punto *M*. Prolongando *B M* obtendremos *A*, quedando el problema resuelto.

EJERCICIOS

1. Hallar el lugar geométrico de los puntos que dividen en una relación determinada $\frac{m}{n}$ a los segmentos que unen los diferentes puntos de una recta dada con un punto también dado (por homotecia).
2. Trazar una circunferencia que pase por un punto dado *P* y sea tangente a dos rectas dadas *r* y *r'*. Discutir el número de soluciones (por homotecia).
3. Trazar una circunferencia que sea tangente a dos rectas dadas *r* y *r'* y a una circunferencia dada *O*. Discutir el número de soluciones (por homotecia).
4. Hallar el lugar geométrico del baricentro de un triángulo que tiene dos vértices fijos *A* y *B* y cuyo tercer vértice *C* describe una circunferencia dada *O*.
5. Demostrar que el paralelogramo obtenido uniendo los puntos medios consecutivos de los lados de un cuadrilátero cualquiera y el que resulta de trazar por los extremos de cada diagonal paralelas a la otra, son homotéticos. Hallar también el centro de homotecia.
6. Hallar gráficamente, dados los radios de dos circunferencias y la distancia entre sus centros, la que existe entre éstos y los centros de homotecia de ambas circunferencias; la distancia que separa dichos centros de homotecia.
7. Inscribir un cuadrado en un sector de modo que dos vértices del cuadrado estén en el arco.
8. ¿La homotecia es una involución?
9. Dado un triángulo *A B C*, encontrar sobre el lado *A B* un punto *M*, y sobre el lado *A C* un punto *N*, tales que $BM = MN = NC$.

10. Tenemos un paralelogramo articulado $A\,B\,C\,L$ con dos de sus lados $A\,B$ y $A\,C$ prolongados de forma que $P\,A = A\,E$ y $C\,E = C\,L$ (aparato denominado *pantógrafo*). Demostrar que si fijamos P en el plano, al recorrer L una figura, E describe su homóloga en la homotecia de centro P y razón $\dfrac{P\,B}{P\,A}$ (fig. 92).

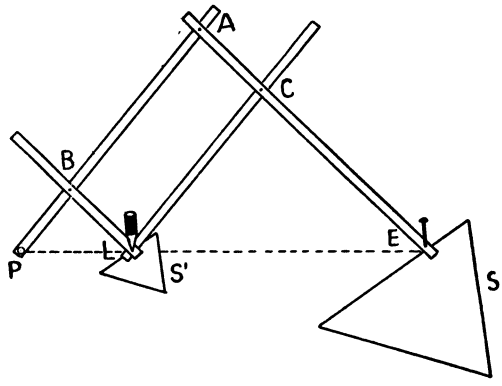


FIGURA 92

11. Traza por un punto P una secante a dos paralelas dadas a, b de tal modo que las distancias de los puntos X e Y de intersección a dos puntos A y B, respectivamente, situados en dichas rectas estén en una razón dada k. ($k = \dfrac{A\,X}{B\,Y}$).

12. Halla el lugar geométrico de los puntos que dividen en una relación determinada $\dfrac{m}{n}$ a los segmentos que unen los diferentes puntos de una circunferencia dada, con un punto dado (por homotecia).

13. Traza por un punto P una secante a dos rectas dadas de forma que la razón de distancias a los puntos A y B de intersección sea dada.

14. Se da la circunferencia C de ecuación $x^2 + y^2 - 5x = 0$. La homotecia directa, de razón $k = \dfrac{5}{6}$ y centro el origen O, la transforma en otra C_1. La homotecia inversa, de mismo centro O y razón $-k$. la transforma en otra C_2. Halla los centros de homotecia inversa que transforma C en C_1, y de la homotecia directa que transforma C en C_2.

15. Se considera la homotecia directa H, cuyo centro es el origen de coordenadas y cuya razón de homotecia es $\dfrac{3}{2}$, y en la que A' es el transformado del $A(0, 2)$. Por otra homotecia directa H_1 el punto A' se transforma en el $A''(4, 1)$ y la correspondiente razón es k_1. Halla el centro de dicha homotecia H_1 si *a*) $k_1 = \dfrac{2}{3}$; *b*) $k_1 = \dfrac{1}{3}$ En ambos casos determina la transformación producto $H_1 \cdot H$.

16. Construye un triángulo $A\,B\,C$, supuestas conocidas las tres medianas. Construye el triángulo $A'\,B'\,C'$, homotético del $A\,B\,C$ en la homotecia de centro el baricentro O de $A\,B\,C$ y de razón $-\dfrac{1}{2}$. Construye la figura homotética de $A'\,B'\,C'$ en la homotecia de centro A y razón 2.

17. Se da una circunferencia de centro O, y en ella el diámetro AB. Se traza por B una recta, que corta a la circunferencia en M. Sobre dicha recta se toma el segmento $MC = MB$. Las rectas OC y AM se cortan en D. Halla el lugar geométrico del punto D cuando la recta BM gira alrededor de B. Construye la figura homotética del lugar geométrico hallado en la homotecia que tiene por centro A y razón $-\frac{3}{2}$.

18. Sea la circunferencia de centro el punto $C(4, 0)$ y que pasa por el origen de coordenadas O. Dos cuerdas variables, OA y OB, perpendiculares entre sí, se toman como diámetros de sendas circunferencias, que se cortan en O y en otro punto P. Demuestra que el punto P pertenece a la recta AB, y determina el lugar geométrico de P. Construye la figura homotética del lugar geométrico hallado en la homotecia que tiene por centro el punto O y por razón -2.

23

LA SEMEJANZA EN EL PLANO

243. Definición y propiedades.

Supongamos una figura plana F, a la que transformamos mediante una homotecia en otra F' (figura 93). Después aplicamos a F' un movimiento hasta obtener F''. Pues bien, F'' es una figura semejante a F. Es decir: *La semejanza es el producto de una homotecia por un movimiento.*

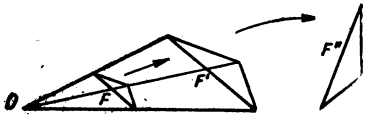


FIGURA 93

$$S = H \cdot M = M \cdot H$$

Invirtiendo el orden de los factores resulta la misma semejanza.

Se dice que la semejanza es *directa* cuando el movimiento que transforma F' en F'' es directo. La semejanza se llama *inversa*, si el movimiento M lo es.

Es natural que la semejanza conservará aquellas propiedades de la homotecia que son independientes de la posición (o sea, invariantes en un movimiento). He aquí algunas de ellas:

A puntos alineados corresponden puntos alineados en el mismo orden.

Los segmentos homólogos son proporcionales.

Los ángulos homólogos son iguales.

La razón de semejanza entre F *y* F″ *es igual que la de homotecia entre* F *y* F′.

Por tanto, la figura transformada de un polígono en una semejanza es otro polígono cuyos ángulos son respectivamente iguales a los de aquél y sus lados son respectivamente proporcionales a los del primero.

244. El grupo de las semejanzas.

Sean $S = H \cdot M$ y $S' = H' \cdot M'$ dos semejanzas. Su producto es

$$S' \cdot S = M' H' \cdot H \cdot M = M' \cdot H'' \cdot M = H'' \cdot M' \cdot M = H'' M''$$

El producto de dos semejanzas es otra semejanza.

Sucede lo mismo en el caso particular de que $H H'$ sea una traslación.

Como el producto de transformaciones biunívocas es *asociativo*, lo será también el producto de semejanzas.

Se llama *semejanza unidad* I a la identidad, de modo que su producto por cualquier semejanza S nos da la misma

$$S \cdot I = I \cdot S = S$$

Si $S = H \cdot M$, llamamos semejanza *inversa* a la $S^{-1} = H^{-1} \cdot M^{-1}$, siendo M^{-1} el movimiento inverso a M, y H^{-1} la homotecia que tiene el mismo centro y razón inversa de H, verificándose

$$S^{-1} \cdot S = M^{-1} \cdot H^{-1} \cdot H \cdot M = M^{-1} \cdot I \cdot M = I$$

Luego *el conjunto de todas las semejanzas forman un grupo, llamado el grupo de las semejanzas.*

Las semejanzas directas forman un subgrupo de este último. No así las semejanzas inversas, pues el producto de dos semejanzas inversas es una semejanza directa.

245. Determinación de la semejanza.

Toda semejanza queda determinada dando dos vectores homólogos $\overrightarrow{AB}$ *y* $\overrightarrow{A'B'}$ *y la clase de semejanza directa o inversa.* En efecto, todo punto C determina con $\overrightarrow{AB}$ un triángulo $A\,B\,C$, y podemos construir sobre $\overrightarrow{A'B'}$ un triángulo $A'\,B'\,C'$ que sea directamente semejante al $A\,B\,C$, y un triángulo $A'\,B'\,C''$ que sea inversamente semejante al $A\,B\,C$. Dada la clase de semejanza, el punto C determina unívocamente el punto C' que le corresponde en la semejanza.

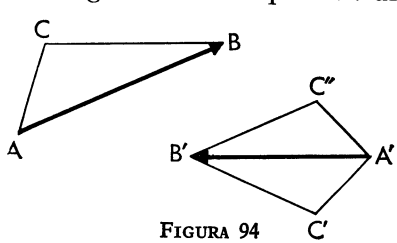


FIGURA 94

246. Descomposición de una semejanza en producto de una homotecia por un movimiento.

La semejanza definida por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{A'B'}$ puede obtenerse mediante el movimiento que lleva AB a $A'B''$ sobre la semirrecta $A'B''$, y mediante la homotecia de centro A' que transforma B'' en B' (fig. 95). Como esto puede repetirse para cada par de vectores homólogos, resulta que cualquier semejanza puede obtenerse de infinitos modos como producto de un movimiento y una homotecia.

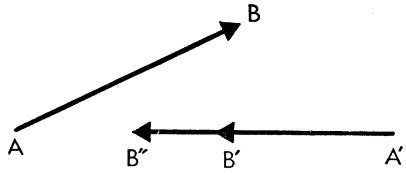


FIGURA 95

247. Centro de semejanza directa.

Si la semejanza es directa, entre los infinitos movimientos y centros de homotecia que transforman F en F'' vamos a buscar un punto O tal que sea a la vez centro de giro y de homotecia. (Claro está que la semejanza ha de ser directa, por ser el giro un movimiento directo.)

Sean $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ segmentos homólogos no paralelos. Sus rectas se cortan en P. Por P, B y B' pasa una circunferencia, y por P, A y A' otra. Como dos circunferencias, si se cortan en un punto, se cortan también en otro, existe un punto O de intersección, que demostraremos es el buscado.

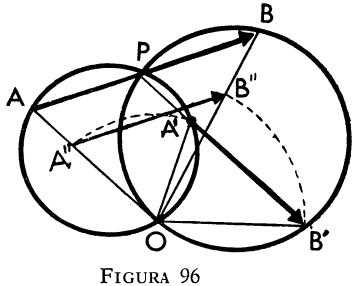


FIGURA 96

En efecto, $\widehat{OBA} = \widehat{OB'A'}$, por ser ambos inscritos en la circunferencia superior y abarcar el mismo arco PO. Además $\widehat{OAB} = \widehat{OA'B'}$ pues ambos son suplementarios del $\widehat{PA'O}$. De aquí se desprende que los triángulos ABO y $A'B'O$ son semejantes. Por tanto, se pueden convertir uno en otro sin más que aplicar un giro de centro O (hasta colocarlos en posición homotética) y una homotecia del mismo centro O.

Si $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ fuesen paralelos, el centro de homotecia sería la intersección de AA' y BB'. (En este caso, el giro sería nulo.)

248. Aplicaciones de la semejanza.

1.º *Dividir un segmento* A B *en* n *partes iguales.* Sea $n = 8$ (figura 97). Tracemos una recta auxiliar indefinida, y llevemos sobre ella, a partir de A, 8 veces un segmento cualquiera. Unamos la división 8 con B, y por las restantes divisiones tracemos otras tantas paralelas a la recta obtenida.

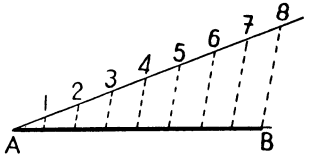


FIGURA 97

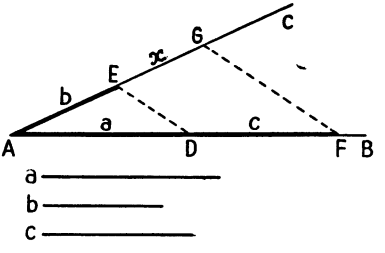


FIGURA 98

El segmento AB quedará dividido en 8 partes iguales, según un conocido teorema.

2.º *Construir un segmento que sea cuarta proporcional a tres segmentos dados.*

Sean a, b y c los segmentos dados (fig. 98). Se pide un segmento x tal que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Para hallarlo se traza un ángulo $\widehat{BAC}$, y sobre sus lados se llevan los segmentos a, b y c como indica la figura. Se traza DE y $FG \parallel DE$. Según el teorema de Tales, EG es la cuarta proporcional pedida.

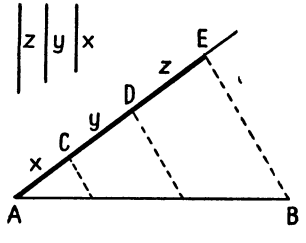


FIGURA 99

3.º *Dividir un segmento* A B *en partes proporcionales a varios segmentos dados* x, y, z (fig. 99).

Por A se traza una semirrecta indefinida, sobre la que se llevan los segmentos x, y, z sucesivamente. Se une B con el punto

de división más lejano, E. Se trazan paralelas a $B\,E$ por los puntos de división C y D. Estas determinan en $A\,B$ segmentos proporcionales a x, y, z, según el teorema de Tales.

4.º *Construir una media proporcional entre dos segmentos dados,* m *y* n.

Construcción 1.ª Sobre una recta $A\,B$ se lleva $A\,C = m$, y a continuación $C\,D = n$ (fig. 100).

Se traza una semicircunferencia con $A\,D$ como diámetro, y la perpendicular $C\,E$ a $A\,D$; $C\,E$ es la media proporcional pedida entre m y n, según el teorema de la altura aplicado al triángulo $A\,D\,E$, rectángulo en E.

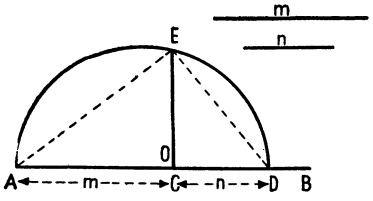


FIGURA 100

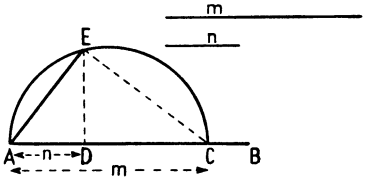


FIGURA 101

Construcción 2.ª Sobre una recta $A\,B$ (fig. 101) se llevan en el mismo sentido y a partir del mismo punto los segmentos $A\,C = m$ y $A\,D = n$. Se traza la circunferencia de diámetro $A\,C$, y en D se levanta la perpendicular $D\,E$. La cuerda $A\,E$ es la media proporcional pedida entre m y n, según el teorema del cateto aplicado al triángulo $A\,C\,E$, rectángulo en E.

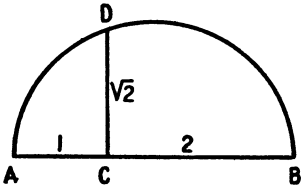


FIGURA 102

EJEMPLO.—*Construir la raíz cuadrada de un número.* Para hallar la raíz cuadrada de 2, se toman sobre una recta dos factores de 2, como 2 y 1 (fig. 102), del mismo modo que m y n en la construcción anterior.

La media proporcional $C\,D$ entre $A\,C$ y $C\,B$ representa gráficamente la raíz de 2.

Medir $C\,D$ y comprobar extrayendo la raíz cuadrada de 2 con dos decimales.

249. Construcciones basadas en la semejanza.

EJEMPLO 1.° *Construir un triángulo dados dos ángulos y un segmento notable de él, como la bisectriz.*

Sean, por ejemplo, los datos: A, B y W_a (fig. 103).

Sobre un segmento cualquiera $A\,B'$ construímos un triángulo semejante al pedido. Basta para ello que tenga los ángulos A y B' iguales a los datos A y B. Tracemos la bisectriz del ángulo A en el triángulo $A\,B'\,C'$ así obtenido. Pro-

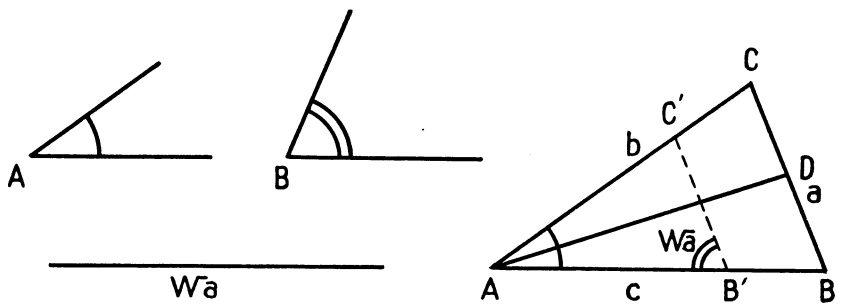


FIGURA 103

longuemos dicha bisectriz hasta un punto D tal que $A\,D = W_a$. Por D tracemos una paralela a $B'\,C'$ hasta cortar en B y C a las prolongaciones de $A\,B'$ y $A\,C'$, respectivamente. El triángulo $A\,B\,C$ resuelve el problema.

EJEMPLO 2.° *Dadas dos semirrectas,* A B *y* A C, *y un punto* D, *determinar un punto de* A C *que equidiste de* A B *y de* D.

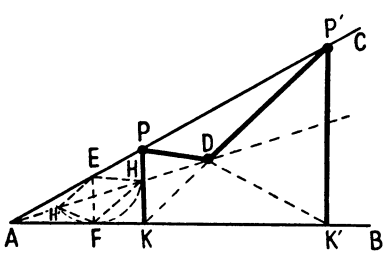


FIGURA 104

Supongamos el problema resuelto, y sea P un punto sobre $A\,C$, tal que $P\,D = P\,K$, siendo $P\,K$ perpendicular a $A\,B$ (fig. 104). Si unimos D con A, se podrá construir fácilmente el triángulo $E\,F\,H$ semejante al $P\,D\,K$.

De aquí la siguiente construcción: por un punto E cualquiera de $A\,C$ se traza $E\,F$ perpendicular a $A\,B$. Haciendo centro en E y con radio igual a $E\,F$ se construye un arco que corta a $A\,D$ en los puntos H y H'.

Llevando por D paralelas a $E\,H$ y $E\,H'$, encontramos los dos puntos P y P' soluciones del problema.

EJEMPLO 3.º—*Inscribir un cuadrado en un triángulo dado* A B C *de modo que un lado del cuadrado se encuentre sobre un lado* A B *del triángulo.*

Comenzaremos por construir un cuadrado sobre el lado *A B* (fig. 105). Sea el cuadrado *A B D E*, exterior al triángulo. Dicho cuadrado es homotético del que buscamos *F G H I* en una homotecia de centro *C*. Obtendremos, por tanto, los puntos *F* y *G* como intersección de las rectas *CD* y *C E* con *A B*.

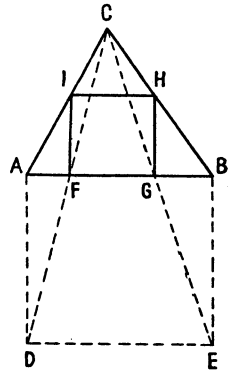


FIGURA 105

El problema no es posible más que cuando los dos ángulos *A* y *B* son agudos.

EJEMPLO 4.º *Dado un triángulo rectángulo* A B C, *cuyo ángulo* B = 30°, *determinar el centro de semejanza y la razón de semejanza que transforma el cateto menor* C A *en el cateto mayor* A B.

Sea *A O* la altura sobre la hipotenusa.

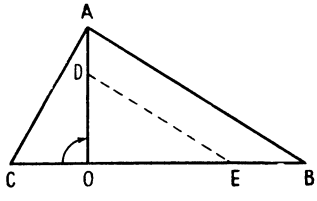


FIGURA 106

Tomando una distancia *O D* = *O C* (figura 106) y trazando por *D* una paralela a *A B*, se obtiene un triángulo *O D E*, igual al *O A C*, y semejante al *O A B*.

Por tanto, tomando el punto *O* como centro de un giro de 90°, el vector *O C* se transforma en el *O D*, y el vector *O A* cae en *OE*. Por otra parte el triángulo *O D E* se transforma en el *O A B* mediante una homotecia de razón.

$$k = \frac{O\,A}{O\,D} = \frac{O\,A}{O\,C} = \frac{A\,B \text{ sen } 30}{A\,C \text{ sen } 30} = \frac{A\,B}{A\,C} = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$$

Luego *O* es el centro de semejanza directa y $\sqrt{3}$ es la razón de semejanza pedidos.

EJEMPLO 5.º *Construir un triángulo* A' B' C' *semejante a otro dado* A B C *y cuyos vértices estén situados sobre tres paralelas* a, b, c.

Supongamos resuelto el problema (fig. 107). Por un punto cualquiera *B'* de *b* tracemos la recta *B' D*, que forme con la paralela *c* un ángulo igual al suplementario de *A'*.

Entonces, el cuadrilátero *A' B' D C'* es inscriptible.

Trazada la circunferencia, vemos fácilmente que son iguales los ángulos *A' D B'* y *A' C' B'*, y también los *A' D C'* y *A' B' C'*.

De aquí deducimos la siguiente construcción: Por un punto cualquiera *D* de la paralela *c* trazamos una recta *D B'* que forme con ella el ángulo suplementario del *A*. El punto *B'*, en que corta a la recta *b* será uno de los pedidos.

Por D trazamos también otra recta que forme con c un ángulo igual al B, obteniéndose A' (punto de intersección con la paralela a). La circunferencia que pase por A', B' y D nos dará el tercer vértice C' en que corta a la paralela c.

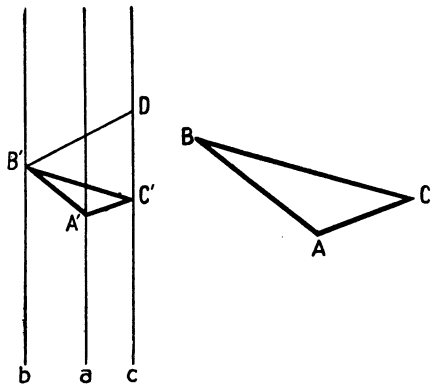


FIGURA 107

EJERCICIOS

1. Inscribe en un triángulo $A\,B\,C$ un rectángulo semejante a uno dado, de forma que uno de sus lados esté sobre el lado mayor a del triángulo.
2. Inscribe en un paralelogramo un rombo semejante a uno dado.
3. Inscribe en un paralelogramo un rectángulo semejante a uno dado.
4. Determina gráficamente los lados de un triángulo de perímetro dado, se-
5. Halla el lugar geométrico de los puntos cuyas distancias a dos rectas dadas estén en una relación constante $\frac{m}{n}$.
6. Conocidos los cuatro lados de un trapecio, calcula los de los triángulos que limitan los lados prolongados, con las bases.
7. Construye un triángulo $A'\,B'\,C'$ semejante a otro dado $A\,B\,C$ y cuyos vértices estén situados sobre tres circunferencias de centro común.
8. Varios triángulos semejantes tienen un vértice homólogo común y otros vértices homólogos sobre una recta dada. Hallar el lugar geométrico de los terceros vértices de todos los triángulos que puedan trazarse en estas condiciones.
9. En un triángulo dado $A\,B\,C$, inscribe otro $A'\,B'\,C'$, cuyos lados son paralelos a tres direcciones dadas.

10. Inscribe en un círculo O' un triángulo $A'\,B'\,C'$, cuyos lados sean paralelos a tres direcciones dadas $A\,B$, $B\,C$, $C\,A$.

11. En un círculo O inscribe un rectángulo semejante a otro rectángulo dado.

12. Se da un círculo y dos puntos fuera de él. Halla en la circunferencia un punto tal que las rectas que lo unen con los lados intercepten en la circunferencia un arco cuya cuerda sea paralela a la recta determinada por los dos puntos conocidos.

13. Halla el lugar geométrico de los puntos tales que desde cada uno se vea desde un mismo ángulo a dos círculos dados. *(Toma dos puntos seguros del lugar y otro posible del mismo).*

14. Por un punto P dado en el interior de un ángulo $X\,O\,Y$ traza una recta tal que el producto de los dos segmentos que resulten en ella, a partir del punto dado, sea igual al cuadrado de un segmento dado l. *(Empieza por trazar una perpendicular desde* P *a* O X.*)*

15. Los puntos $A(0,\ 2a)$ y $B(0,\ a)$ se transforman por una semejanza en los $A'(0,\ 0)$ y $B'(a,\ 0)$. Halla las coordenadas del centro de semejanza directa, y especifica un giro (del cual se determinará su centro y su amplitud) y una homotecia (de la cual se determinarán su centro y su razón) cuyo producto sea la semejanza.

24

LA INVERSION EN EL PLANO

250. Definición.

Dado un punto O del plano y un número k, se llama *inversión* a la transformación que hace corresponder a un punto A otro A' alineado con A y con O de modo que $OA \cdot OA' = k$ (fig. 108).

Si $k > 0$, A y A' están al mismo lado de O.

Si $k < 0$, A y A' están a distinto lado de O.

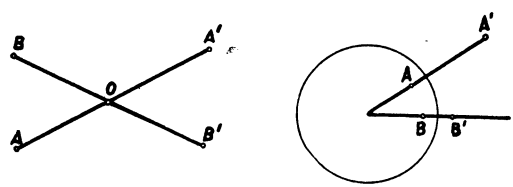


FIGURA 108

Tanto en un caso como en otro, la inversión es una transformación involutiva, ya que el homólogo de A' es el mismo A.

Vamos a buscar los puntos que se transformen en sí mismos (puntos dobles). Serán tales que $OM \cdot OM = OM^2 = k$; $OM = \sqrt{k}$. Es decir, todos los puntos cuya distancia a O sea $\sqrt{k}$, son dobles. Forman una circunferencia, llamada de *autoinversión*.

Evidentemente, para que estos puntos existan es preciso que $k > 0$.

251. Figuras dobles en la inversión.

Son aquellas que se transforman en sí mismas, aunque cada uno de sus puntos no se transforme en sí mismo.

Existe, en primer lugar, la *circunferencia de autoinversión* (si $k > 0$), o sea el lugar de los puntos cuya distancia a O sea $\sqrt{k}$.

Además son dobles las rectas que pasan por el centro, pues la recta OA coincide con la OA' por definición.

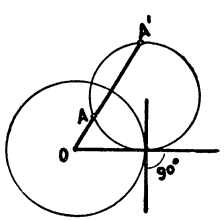


FIGURA 109

Toda circunferencia respecto a la cual O tenga una potencia igual a k, es también doble (fig. 109). Porque dado un punto A cualquiera de esa circunferencia, se transforma en otro A' de la misma, pues $O\,A \cdot O\,A' = k$.

De aquí que toda circunferencia que pase por dos puntos homólogos es doble (porque la potencia de O respecto a ella es k). En otras palabras, si $k > 0$, todas las circunferencias ortogonales a la circunferencia de puntos dobles son dobles y recíprocamente. Puesto que la potencia de O respecto a ellas es $r^2 = k$.

252. Determinación de la inversión.

Una inversión queda perfectamente definida conociendo el centro O y la potencia, o el centro y la circunferencia de puntos dobles, o el centro y un par de puntos homólogos, o todavía el centro y una circunferencia doble.

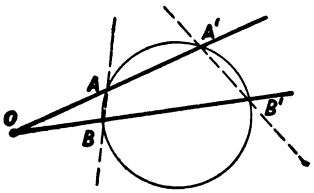


FIGURA 110

Veamos en el penúltimo caso cómo se construirá el homólogo de un punto B (figura 110).

Se conocen O, A, A' y B. Construímos sobre $A\,A'$ una circunferencia que pase también por B (hay sólo una), que es doble. Se prolonga $O\,B$ hasta cortar a la circunferencia en B', que será el homólogo de B, porque la circunferencia es doble.

En toda inversión los cuatro puntos pertenecientes a dos pares cualesquiera de puntos homólogos son concíclicos (están en la misma circunferencia).

253. Rectas antiparalelas.

Consideremos dos pares A, A' y B, B' de puntos homólogos en una inversión de polo O. Unamos A con B y B' con A'. Tenemos que los triángulos $O\,A\,B$ y $O\,B'\,A'$ son semejantes, por tener el ángulo O común, y los lados que lo forman proporcionales

$$\frac{O\,A}{O\,B} = \frac{O\,B'}{O\,A'}$$

ya que $O\,A \cdot O\,A' = O\,B \cdot O\,B' = k$.

Luego las rectas $A\,B$ y $A'\,B'$ cortan a las $O\,A$ y $O\,B$ de modo que el ángulo $O\,A\,B$ es igual al $O\,B'\,A'$: se dice que $A\,B$ y $A'\,B'$ son *antiparalelas respecto de las* O A *y* O B.

Las rectas A B *y* A′ B′ *que unen puntos homólogos en una inversión de centro* O *son antiparalelas respecto a las rectas* O A *y* O B.

Recíprocamente, si las rectas AB y $A'B'$ son antiparalelas res-

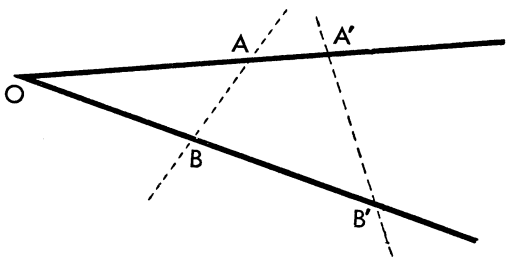


FIGURA 111

pecto a las OA y OB, los triángulos AOB y $A'OB'$ son semejantes, caso de cumplirse la hipótesis anterior, de donde (fig. 111)

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'} \quad ; \quad \text{o sea} \quad OA \cdot OA' = OB \cdot OB' \quad [1]$$

Dos rectas concurrentes en O *son cortadas por dos antiparalelas respecto de ellas, en puntos homólogos en una inversión de centro* O.

254. Figura inversa de una recta que no pasa por O.

Sea O el centro de una inversión y P, P' un par de puntos homólogos. Y se quiere calcular la figura inversa de la recta r (fig. 112).

Trazamos por O la perpendicular a r, a la que corta en M. Como PM forma ángulo recto con OM, $P'M'$ también debe formarlo con OP, luego M' es la intersección de OM con una perpendicular a OP por P'.

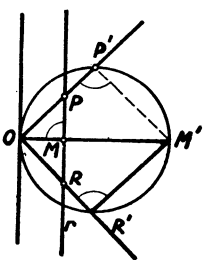


FIGURA 112

Construyamos el homólogo de otro punto R de r. Como MR es perpendicular a OM, $M'R'$ será perpendicular a OR, luego la construcción es la siguiente: Se traza la recta OR. Desde M' se construye una perpendicular a OR. La intersección de ambas rectas será R'. Pero sucede que R' está en una circunferencia de diámetro OM', que es el arco capaz de 90°, o sea el lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ve OM' bajo un ángulo de 90°. Como R es un punto cual-

quiera de la recta y todos los puntos de r se transforman en puntos de dicha circunferencia, tendremos:

La figura inversa de una recta que no pasa por el centro de inversión es una circunferencia que pasa por él.

El recíproco también es válido. (Demuéstrelo el alumno.)

La figura inversa de una circunferencia que pasa por el centro O *de inversión es una recta que no pasa por él.*

255. Figura inversa de una circunferencia que no pasa por O.

Sean A y B dos puntos de la circunferencia alineados con O. Sus inversos supongamos que son A' y B' (fig. 113).

Se verificará: $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = k$.

Dividiendo esta expresión por $OA \cdot OB = p$ (potencia de O respecto a la circunferencia dada).

$$\frac{OA'}{OB} = \frac{OB'}{OA} = \frac{k}{p}$$

es decir, que B' es homólogo de A y A' homólogo de B en una homotecia de centro O y razón k/p. Otro tanto ocurre con cualquier pareja de puntos alineados con O. De aquí resulta:

La figura inversa de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión es una circunferencia homotética de ésta con centro de homotecia en el de inversión y razón k/p.

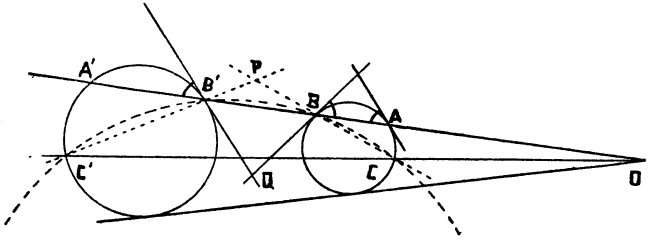


FIGURA 113

Si $p = k$, la circunferencia se transforma en sí misma (como ya se había demostrado).

Los puntos correspondientes en la inversión suelen llamarse *antihomólogos* en la homotecia.

256. **Isogonalidad de las curvas inversas respecto a un radio vector común.**

Consideremos en la figura 113 las tangentes en los puntos A y B', homólogos en la homotecia de centro O y razón k/p. Dichas tangentes son paralelas (núm. 236), por ser rectas homólogas en una homotecia. Luego forman ángulos iguales con un radio vector OA común: $\widehat{A} = \widehat{B'}$. Por otra parte, trazando la tangente en B, se tiene que $\widehat{A} = \widehat{B}$, por ser semiinscritos que abarcan el mismo arco. Luego $\widehat{B} = \widehat{B'}$. Es decir:

Los dos arcos inversos B A *y* B′ A′ *son isogonales* (forman ángulos iguales) *con un radio vector común.* Sin embargo, *cambia el sentido de los ángulos.*

Se entiende por *ángulo entre una recta y un arco* el que forma la tangente al arco con la recta.

Veremos que lo mismo sucede cuando el arco de circunferencia se transforma en una recta (fig. 114).

Sea la circunferencia $OM'A'$ que se transforma en la recta r en una inversión de centro O. Tracemos la tangente OR a la circunferencia en O. Las rectas r y OR serán paralelas, por ser perpendiculares al mismo diámetro OM'. Luego $\widehat{ROA} = \widehat{MAA'} = \alpha$, por correspondientes entre paralelas.

Sea A' el homólogo del punto A en la inversión, y tracemos la tangente a la circunferencia por A'. Serán iguales los ángulos ROA y $AA'T$, por semiinscritos que abarcan el mismo arco. Luego

$$\widehat{MAA'} = \widehat{AA'T} = \alpha$$

La recta r *y el arco* A′ M′ *forman ángulos iguales con el radio vector común* O A, *pero de sentido opuesto.*

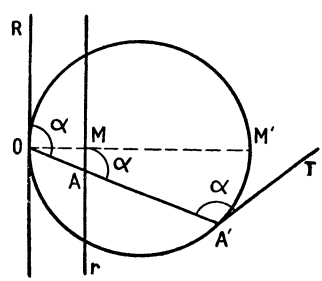


FIGURA 114

257. **Conservación de ángulos en la inversión.**

Se llama *ángulo de dos curvas,* en un punto de intersección, al que forman sus tangentes en dicho punto.

Los resultados obtenidos en el número anterior se generalizan fácilmente para curvas inversas cualesquiera: *forman con el radio*

vector común ángulos iguales pero de opuesto sentido. Sean (figura 115) $A\,B$ y $A'\,B'$ dos curvas inversas en una inversión de centro O, $A\,C$ y $A'\,C'$ otras dos curvas correspondientes en la misma inversión, y sea $A\,A'$ el radio vector común. Se tendrá:

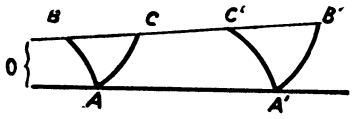


FIGURA 115

$$\widehat{A'\,A\,B} = \widehat{O\,A'\,B'}$$
$$\widehat{A'\,A\,C} = \widehat{O\,A'\,C'}$$

Restando ambas igualdades, resulta:

$$\widehat{B\,A\,C} = \widehat{B'\,A'\,C'}$$

lo que demuestra que *la inversión conserva los ángulos.* O en otras palabras: *La inversión es una transformación conforme.*

Se ve también fácilmente que *la inversión invierte el sentido de los ángulos.*

258. Aplicaciones de la inversión.

EJEMPLO 1.—*Conociendo la distancia* M N *entre dos puntos* M *y* N *y sus radios vectores* O M *y* O N, *hallar la distancia* M' N' *entre los inversos de los primeros.*

Se sabe que $M\,N$ y $M'\,N'$ son antiparalelas respecto a los lados del ángulo $M\,O\,N$. Luego

$$\frac{O\,N}{M\,N} = \frac{O\,M'}{M'\,N'}$$

o sea

$$M'\,N' = \frac{O\,M'}{O\,N} \cdot M\,N = \frac{k/O\,M}{O\,N} \cdot M\,N = \frac{M\,N}{O\,M \cdot O\,N} \cdot k$$

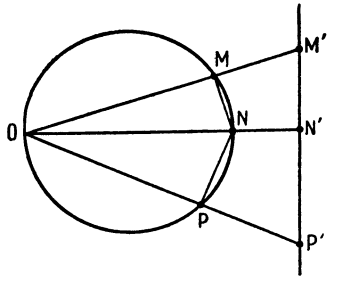


FIGURA 116

EJEMPLO 2: TEOREMA DE PTOLOMEO. — *La condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea inscriptible en una circunferencia y convexo es que la suma de los productos de los pares de lados opuestos sea igual al producto de las diagonales.*

Tomemos sobre una circunferencia un punto O como centro de una inversión de potencia k. La inversa de la circunferencia será una recta $M'\,P'$ (fig. 116). Consideremos el cuadrilátero inscrito $O\,M\,N\,P$, y sean M', N' y P' los inversos de M, N y P respectivamente. Según el ejemplo anterior será:

$$M'N' = \frac{MN}{OM \cdot ON} \cdot k \quad ; \quad N'P' = \frac{NP}{ON \cdot OP} \cdot k$$

$$P'M' = \frac{MP}{OM \cdot OP} \cdot k$$

Pero como $M'N' + N'P' = M'P'$, resulta

$$\frac{MN}{OM \cdot ON} \cdot k + \frac{NP}{ON \cdot OP} \cdot k = \frac{MP}{OM \cdot OP} k$$

o sea

$$\mathbf{MN \cdot OP + NP \cdot OM = MP \cdot ON}$$

como queríamos demostrar.

Si el cuadrilátero no fuese inscrito, es decir, si el vértice N, por ejemplo, fuera interior a la circunferencia, o exterior a la misma, su inverso N' sería exterior al segmento NN' de la figura 116, o interior al mismo respectivamente. Se verificaría en ambos casos

$$M'N' + N'P' > M'P'$$

y haciendo la misma sustitución anterior, quedaría demostrado el teorema contrario.

EJEMPLO 3.— *Trazar la circunferencia que pasa por el punto* P, *es tangente a la recta* r *y corta, según un ángulo dado* α, *a la circunferencia* O (figura 117 *a*).

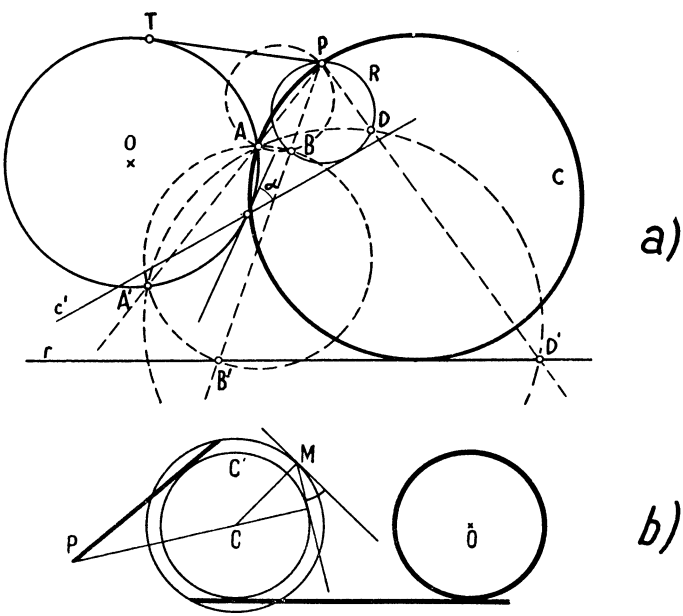


FIGURA 117

Sea C la solución del problema. Aplicando una inversión de centro P y potencia PT^2, la circunferencia O se transformará en ella misma (véase: figuras dobles en la inversión); la recta r en una circunferencia R que pasa por P, y la circunferencia C en otra recta c' que no pasa por P. Como en la inversión se conservan los ángulos, la recta c' (homóloga de la circunferencia C) será tangente a la circunferencia R (homóloga de la recta r) y cortará a la O (homóloga de sí misma), según un ángulo α.

La construcción será, por tanto, así: se invierte—con el centro y potencia dichos—la recta r, se traza a la circunferencia resultante R una tangente que corte a O según el ángulo α, se invierte esta recta c' y obtenemos la circunferencia solución C.

Discútase el número de soluciones.

NOTA.—Para trazar una secante que pase por un punto dado P (o que sea tangente a una circunferencia dada) y corte a una circunferencia dada C, según un ángulo α, se hace lo siguiente (fig. 117 *b*):

Sea C la circunferencia dada. Se traza por un punto M cualquiera una secante que forma con la tangente en M un ángulo α, y luego una circunferencia tangente a ella, concéntrica con C. Por el punto dado P se traza una tangente a C, que es la secante pedida.

Si en lugar de pasar por P ha de ser tangente a otra circunferencia O, se traza la tangente común a C' y O.

EJEMPLO 4.—*Dados tres círculos, hallar una inversión tal que los centros de los tres círculos inversos estén en línea recta* (fig. 118).

Sea P el centro de la inversión pedida. Es evidente que la recta que une los tres centros es la figura inversa de un círculo que pasa por P y corta

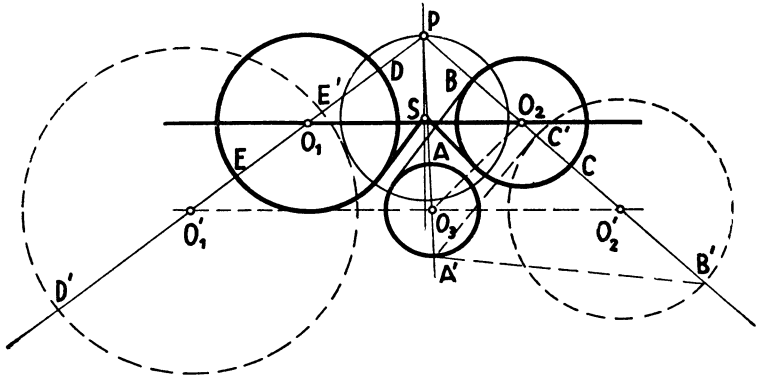


FIGURA 118

ortogonalmente a los tres círculos dados, porque cortando la recta de los centros ortogonalmente a sus círculos, su inversa tiene que cortar ortogonalmente a los inversos de los tres círculos dados.

Por consiguiente, P tiene que estar en el círculo que corta ortogonalmente a los tres dados. Este círculo tiene por centro el centro radical, y de radio, la tangente trazada de dicho centro a cualquiera de los círculos dados.

Sean O_1, O_2 y O_3 los tres círculos dados y S centro radical y centro del círculo que corta ortogonalmente a los dados. Tomemos P como centro de inversión y la potencia de P con respecto a O_3 como potencia de inversión. El círculo inverso de O_3 es el mismo O_3. Se hallan los inversos de O_1 y de O_2 y sus centros estarán alineados con O_3, porque cortando el círculo S ortogonalmente a O_1, O_2 y O_3, su inversa, que es una recta, tiene que cortar ortogonalmente a los círculos inversos de O_1, O_2 y O_3. Solamente la recta que contiene diámetros de los tres círculos verifica esta propiedad, luego los centros de los tres círculos inversos de los dados están en línea recta: O_3 es inverso de sí mismo; O'_2 es inverso de O'_2 y O'_1 de O_1.

EJERCICIOS

1. Traza una circunferencia que pase por dos puntos dados y: *a*), sea tangente a una circunferencia dada; *b*), forme un ángulo dado, con una circunferencia dada. Discute el número de soluciones.
2. Construye una circunferencia que pase por un punto dado y sea tangente a una recta y a una circunferencia dadas. Número de soluciones.
3. Construye la circunferencia que sea tangente a tres circunferencias dadas.
4. Traza una circunferencia que sea tangente a una recta dada en un punto dado y que forme un ángulo dado α con una circunferencia dada.
5. Demuestra que dos figuras inversas de una tercera respecto de un mismo centro son homotéticas entre sí y expresa la razón de homotecia en función de las potencias de inversión.
6. Traza por dos puntos dados una circunferencia que biseque a una dada.
7. Por uno de los puntos de intersección de dos circunferencias trazar una secante tal que las cuerdas determinadas sobre ella por las dos circunferencias tengan un producto dado.
8. Dos círculos cualesquiera se pueden considerar como figuras inversas, siendo centro de inversión uno de los centros de homotecia. Demuéstralo.
9. Atribuyendo un signo a los ángulos, según su sentido, demuestra que si A', B', C' son homólogos de A, B, C, en una inversión se verifica: $\widehat{ABC} + \widehat{A'B'C'} = \widehat{AOC}$.
10. Traza por un punto P una circunferencia que forme ángulos dados con otras dos circunferencias dadas.
11. Sea un círculo O y un punto fijo S. Se traza un diámetro variable AOB y se unen A y B con S, y sean A' y B' los segundos puntos de intersección con la circunferencia de las rectas SA y SB. Demuestra que la circunferencia circunscrita al triángulo $SA'B'$ pasa también por otro punto fijo.
12. Por un punto dado P, trazar una recta que corte a los dos lados de un ángulo dado en A y B, de tal modo que $PA \cdot PB = a^2$, siendo a un segmento dado.

13. Construye una circunferencia A tangente a su inversa A', conociendo en posición el origen de inversión y los inversos de sus centros O y O'. *(El punto de contacto es el punto medio de los inversos de* O *y* O′ *y la potencia de inversión es el cuadrado de la distancia del centro de inversión —centro de semejanza directa— a dicho punto de contacto).*

14. Tenemos un rombo articulado $A\,B\,A'\,C$, en dos de cuyos vértices opuestos B, C se articulan a su vez dos segmentos iguales $O\,B$ y $O\,C$, siendo O un punto fijo del plano (fig. 128). Demostrar que si A describe una figura, A' describe su inversa, en la inversión de centro O y razón $O\,B^2 - O\,A^2$. (Inversor de Peaucellier.)

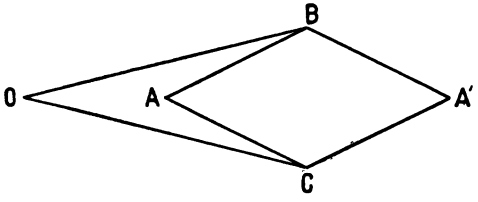


FIGURA 119

15. Se dan dos circunferencias y un punto y se determinan las inversas de aquéllas respecto al punto, siendo conocida la potencia de inversión. Hallar el lugar geométrico del punto dado para que la circunferencia inversa de la primera tenga un radio igual al de la segunda, y el radio de la inversa de la segunda sea igual al de la primera.

16. Tenemos dos circunferencias fijas C y C' que se cortan. Hallar el lugar geométrico de los puntos de contacto de las circunferencias tangentes a estas dos y tangentes entre sí dos a dos. ¿Coincide este lugar geométrico con el de los centros de las mismas circunferencias?

17. Se tiene la circunferencia $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, y la recta $x + y = 2a$. Se efectúa la inversión de centro en el origen, que deja invariable al punto $A(a, a)$. Razona cuál es la figura transformada por la inversión del menor de los segmentos circulares determinados por la circunferencia y la recta dadas. Hallar el área de esta transformada.

18. Sea la circunferencia (C) de ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$. Se pide:

    1.º Hallar la potencia de la inversión, de centro el origen de coordenadas, que transforma la circunferencia (C) en sí misma.

    2.º Hallar el lugar geométrico de los puntos dobles de la inversión. Si A y B son los puntos de dicho lugar situados sobre (C), ¿cuánto mide el ángulo $\widehat{A\,O\,B}$?

    3.º Ecuación de la línea transformada por la inversión de la recta $A\,B$, y coordenadas del punto inverso del centro de la (C).

19. En un sistema de ejes cartesianos rectangulares dos circunferencias tangentes exteriormente son inversas, siendo el origen de coordenadas el centro de inversión. El centro A de la menor tiene como inverso el punto $A'(16, 0)$ y el centro B' de la mayor tiene como inverso el punto $B(4, 0)$. Halla el radio de la circunferencia de puntos dobles en la inversión. y los centros y radios del par de circunferencias tangentes exteriores. Halla la ecuación de la figura inversa de la recta $x = 16$.

20. En una inversión con centro en el origen de coordenadas son homólogos los puntos $A(1, 2)$ y $A'(2, 4)$, y se desea obtener la potencia de la inversión y la ecuación de la circunferencia de autoinversión.

21. Dadas las circunferencias $x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$, $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$, hallar las coordenadas del centro de inversión positiva que transforma una circunferencia en la otra, y el valor de la potencia de esta inversión.

22. En una inversión en el plano, de centro el origen de coordenadas y potencia $k = 9$, se da la circunferencia de centro $C(2, 0)$ y radio 1.

    1.º Halla la ecuación de la figura inversa de dicha circunferencia.

    2.º Se traza por el origen de coordenadas una tangente a la circunferencia dada. Halla las coordenadas del punto P de contacto y las de su inverso P', así como las coordenadas del punto C', inverso del centro C de la circunferencia dada.

23. Dadas las circunferencias C_1 y C_2 de ecuaciones respectivas

$$x^2 + y^2 = 4 \ , \ x^2 + y^2 - 10x + 24 = 0$$

halla los centros O_1 y O_2 y las potencias k_1 y k_2 de las inversiones que transforman una circunferencia en otra.

24. En una inversión de centro el origen de coordenadas la circunferencia $x^2 + y^2 = 36$ es de puntos dobles. Hallar: 1.º) La ecuación de la figura inversa de la recta $y = 6$. 2.º) El inverso del punto (0, 1).

25. Construye un triángulo $A\,B\,C$, rectángulo en A, del que se conoce la hipotenusa a y la suma de los catetos. Dibuja la figura inversa de dicho triángulo en la inversión que tiene por centro A y potencia $-a^2$.

25

TRASLACIONES Y GIROS EN EL ESPACIO

259. Los sentidos en el espacio.

Lo mismo que en la recta o en el plano, se puede definir en el espacio dos sentidos opuestos.

Para fijar uno de ellos basta establecer un orden entre las tres aristas de un triedro. Entonces se dice que el triedro, y también el espacio, se ha *orientado.*

Dado un triedro $V\,A\,B\,C$, colocado el ojo del observador en V (fig. 120) y mirando a las tres aristas $V\,A$, $V\,B$ y $V\,C$, si imaginamos un móvil que describe una trayectoria curvilínea yendo de A a B y después a C, para volver a A, diremos que el triedro tiene *sentido directo* si se ve al móvil moverse en el sentido contrario a las agujas del reloj, y *sentido inverso* en el caso contrario.

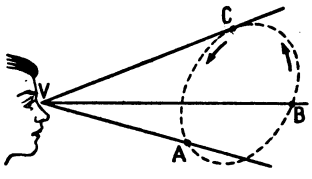


FIGURA 120

260. Los movimientos en el espacio.

Se definen como en el plano diciendo que son las *transformaciones o correspondencias que resultan entre las posiciones inicial y final de los puntos de un cuerpo rígido, sin tener en cuenta ni el tiempo ni las posiciones intermedias.* En el espacio carece de significado hablar de movimientos directos e inversos, pues al invertir un plano, se invierte también el semiespacio desde el cual se supone observado, con lo cual *se conserva el sentido.*

Diremos que dos figuras son *iguales* o *congruentes* cuando una de ellas puede obtenerse transformando la otra mediante un movimiento.

Veremos que hay transformaciones que conservan todas las relaciones de incidencia y orden de los elementos de una figura, pero

invierten su sentido, de modo que las dos figuras transformadas no pueden hacerse coincidir. Denominaremos a tales transformaciones *pseudomovimientos*, y a las dos figuras *pseudocongruentes*.

261. Los vectores libres en el espacio.

Todos los resultados obtenidos para los vectores libres en el plano se generalizan sin dificultad y sin variación para los *vectores libres en el espacio*, pudiéndose afirmar:

El conjunto V *de los vectores libres del espacio constituye un espacio vectorial.*

262. Las traslaciones en el espacio.

Se llama *traslación definida por el vector libre* **v**, y se representa por *T*, *una correspondencia en la que cada punto* A *del espacio se transforma en otro punto* A' *tal que el vector* $\overrightarrow{AA'} \in \mathbf{v}$.

De un modo análogo a como se hizo en el plano, se demuestra fácilmente que *las traslaciones son correspondencias biunívocas*, que transforman las *rectas en rectas paralelas*, y *los segmentos en segmentos iguales y paralelos.*

263. Otras figuras homólogas en la traslación.

Las traslaciones transforman planos en planos paralelos, y recíprocamente.

Sean *A*, *B* y *C* tres puntos del espacio no alineados, y sea *M* otro punto del plano determinado por ellos. Sean *A'*, *B'*, *C'* y *M'* sus transformados en una traslación *T*. Por definición

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{MM'}$$

y las rectas $AB//A'B'$, $AC//A'C'$ y $AM//A'M'$.

Del paralelismo de las dos primeras resulta que los planos *A B C* y *A' B' C'* son paralelos. Del paralelismo de *A M* y *A' M'*, por estar *A'* en el plano *A' B' C'*, se deduce que *A' M'*, y por tanto *M'*, están también en dicho plano.

La recíproca es totalmente análoga.

Del mismo modo que en el plano se demuestra que *las traslaciones transforman triángulos en triángulos iguales*, y por tanto *ángulos en ángulos iguales.*

De aquí deducimos que *las traslaciones transforman los diedros en diedros iguales*, ya que por conservar los ángulos, conservan la

perpendicularidad, y, por tanto, el rectilíneo de un diedro se transforma en el rectilíneo del diedro transformado.

En consecuencia podemos afirmar que las *traslaciones transforman cualquier figura del espacio en otra figura igual.*

Las traslaciones en el espacio son movimientos.

264. El grupo de las traslaciones en el espacio.

De un modo totalmente análogo a como se hizo en el plano, se demuestra aquí que:

El producto de dos traslaciones es una nueva traslación independiente del orden en que se efectúen dichas traslaciones. Por tanto, *todas las traslaciones del espacio forman un grupo abeliano.*

265. Superficies de traslación.

Son las superficies engendradas por líneas llamadas *generatrices*, que se trasladan teniendo como guías otras líneas llamadas directrices. Por ejemplo, *la superficie prismática* se obtiene por la traslación de una arista a lo largo del contorno de un polígono no coplanario con ella. Los lados de dicho polígono *directriz* son las guías de cada traslación. También puede considerarse como generatriz el polígono sección, y como guía la arista (fig. 121 a).

Del mismo modo *la superficie cilíndrica* se engendra por una circunferencia que se traslada teniendo como guía una de las generatrices (fig. 121 b).

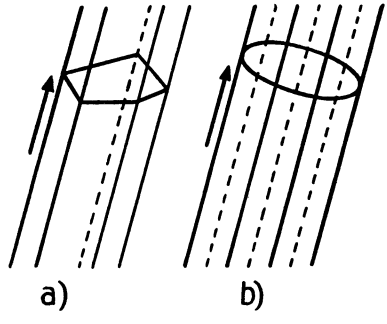


FIGURA 121

266. Giros en el espacio.

Giro o rotación en el espacio es una transformación tal que a todo punto M de una figura F le hace corresponder otro M' que cumple las siguientes condiciones: 1.ª el punto M' pertenece al plano π perpendicular desde M a una recta fija e, llamada *eje de giro* (figura 122); 2.ª las distancias OM y OM' de dichos puntos al punto O, intersección del plano π con la recta e, son iguales; 3.ª el ángulo MOM', contado en el sentido positivo de rotación alrededor de e,

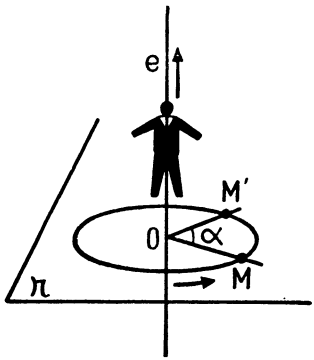


FIGURA 122

tiene un valor constante y determinado α, denominado *ángulo de giro.*

Según la definición adoptada en el número 259, se llama *sentido positivo de rotación* alrededor de un eje dirigido *e* al de un móvil que un observador, colocado con los pies en *O* y en la dirección positiva del eje, ve describir la circunferencia de centro *O* en sentido contrario a las agujas de un reloj.

De esta definición de giro se deduce que *todos los puntos del eje son dobles.* Son también dobles *todos los planos perpendiculares al eje,* y en cada uno de ellos se verifica un giro cuyo centro es el punto *O* de intersección del plano con el eje.

Como el cuerpo es rígido, todo punto del eje equidistará de cada dos planos homólogos, luego el eje de giro estará en el plano bisector de ambos.

De un modo análogo a como se hizo para los giros en el plano (lección 19) se demuestra aquí que *un giro en el espacio es un movimiento,* y recíprocamente, que *todo movimiento en el que un eje* e *coincide con su homólogo es un giro alrededor de dicho eje.*

267. Construcción del eje.

Existen dos casos análogos a los del giro plano, estudiados en los números 208 y 209: 1.° si se conocen dos pares de puntos homólogos *A, A'* y *B, B',* todo punto del eje debe equidistar de *A* y de *A',* luego estará en un plano perpendicular al segmento *A A'* en su punto medio (llamado *plano mediador del segmento* A A'); por la misma razón el eje ha de estar en el plano mediador del segmento *B B',* luego será la intersección de ambos planos; 2.° si se conocen dos semiplanos homólogos α y α' y en ellos dos semirrectas homólogas *r* y *r',* y en éstas dos puntos homólogos *A* y *A',* el eje será la intersección del plano bisector de los semiplanos α y α' con el plano mediador de los puntos *A* y *A',* situados en semiespacios correspondientes.

268. Grupo de giros con el mismo eje.

Resulta evidente que tanto el recíproco de un giro como el producto de dos giros es otro giro con el mismo eje, independiente del

orden en que se realicen. Por tanto todos *los giros con el mismo eje forman un grupo abeliano.*

269. Superficies de revolución.

Son las engendradas por una línea llamada *generatriz* al girar alrededor de un eje. Las trayectorias de los puntos de la línea generatriz—circunferencias perpendiculares al eje—se llaman *paralelos* de la superficie. Llámanse *meridianos* las líneas de intersección de la superficie con planos que pasan por el eje.

Son figuras muy utilizadas en geometría las superficies de revolución siguientes:

Superficie cilíndrica, de generatriz paralela al eje.

Superficie cónica, de generatriz concurrente con el eje.

Superficie esférica, giro de una semicircunferencia alrededor del diámetro.

Superficie tórica o *toro,* engendrada por el giro de una circunferencia alrededor de un eje que no sea diámetro y coplanario con ella. Por ejemplo, un neumático de automóvil (fig. 123).

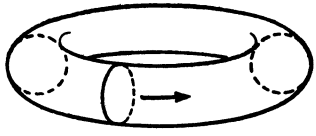


FIGURA 123

270. Movimiento de un sólido con un punto fijo.

El movimiento más general de un sólido con un punto fijo equivale a un giro alrededor de un eje que pasa por el punto fijo. En efecto, supongamos que el movimiento está definido por dos semirrectas homólogas r y r' que pasan por el punto fijo O (fig. 124) y por dos semiplanos homólogos α y α' limitados por r y r'. Se escogen dos puntos A y A' sobre ambas semirrectas, que equidisten de O, homólogas por tanto en el movimiento dado. Construyamos dos planos: el mediador del segmento $A\,A'$, que denominaremos β, y el bisector del diedro formado por los semiplanos α y α', que llamaremos δ. El plano β pasa por O, pues este punto equidista de A y A'; el plano δ pasa también por O, pues contiene a la arista común a los dos diedros. Por tanto, si β y δ no coinciden, se cortan según una recta que pasa por O, y que demostraremos es el eje de giro e.

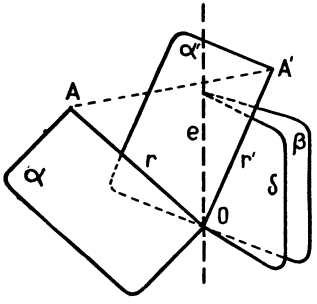


FIGURA 124

Efectivamente, los puntos de este eje equidistan de A y A', por pertenecer a β, y también equidistan de los semiplanos α y α', por pertenecer a δ. Luego es eje de un giro que transforma A en A', r en r' y α en α'. Es decir, coincide con el movimiento dado.

271. Producto de una traslación por un giro de eje perpendicular a la dirección de traslación.

Supongamos que una figura F sufre una traslación cuya guía es el vector $A\,A'$ (fig. 125) perpendicular a un eje e, y a continuación un giro alrededor del mismo eje. Cualquier plano normal al eje e es entonces doble en la traslación y en el giro, pues un punto A cualquiera se transforma primero en el A' y luego en el A'', pertenecientes al plano π normal a e desde A. En el plano π tenemos, por tanto, una traslación y un giro plano alrededor del punto O, que como vimos en su lugar (núm. 208) equivalen a un giro único alrededor de un punto O' bien determinado del plano.

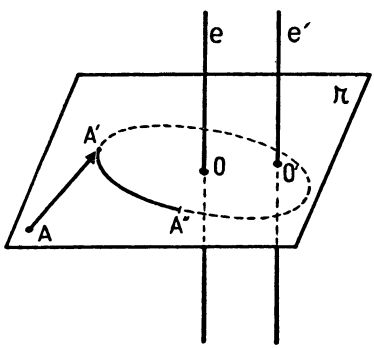


FIGURA 125

En el espacio el movimiento equivale a un giro único alrededor de un eje e', normal en O' al plano π. Luego *el producto de una traslación por un giro de eje perpendicular a las guías de la traslación equivalen a un giro único de eje paralelo a aquél.*

272. Movimiento helicoidal.

Se llama así al producto de una traslación y un giro alrededor de una de las guías de la traslación.

Es el movimiento que ejecuta un tornillo o un sacacorchos al penetrar en un objeto. El nombre se deriva de la *hélice*, que es la línea trayectoria de cualquier punto.

Demostremos que este producto es *independiente del orden en que se efectúan dichos movimientos* (fig. 126).

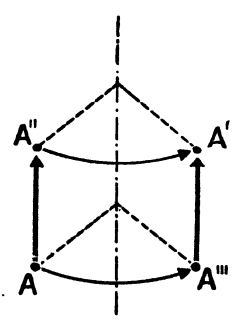


FIGURA 126

Si A'' es el homólogo de A en la traslación y A' el homólogo de A'' en el giro; y por otra parte A''' es el homólogo de A en el giro, ha-

brá que demostrar que A' es el homólogo de A''' en la traslación. Lo que resulta inmediato, pues $\overrightarrow{A'''A'}$ es igual que $\overrightarrow{AA''}$, por ser homólogos en el giro, y paralelo a él, por ser ambos paralelos al eje.

273. Movimiento más general de un sólido en el espacio.

Veamos a qué equivale el movimiento que transforma la figura F, con un punto en A, en la figura F', con su punto homólogo en A' (fig. 127).

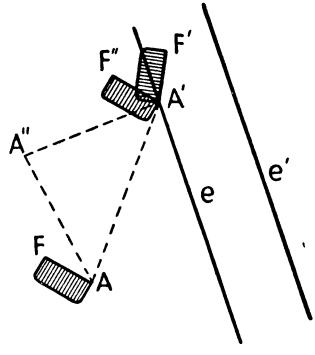


FIGURA 127

Mediante una traslación $\overrightarrow{AA'}$ llevamos F a F'', y permaneciendo fijo A', existe un giro de eje e que transforma F'' en F' (número 270). Pero la traslación $\overrightarrow{AA'}$ se puede descomponer en dos: una $\overrightarrow{AA''}$, paralela a e, y otra $\overrightarrow{A''A'}$, normal a e. Esta última con el giro alrededor de e equivale a un giro único alrededor de un eje e', paralelo al e. Por tanto el movimiento dado equivale a la traslación $\overrightarrow{AA''}$ y el giro alrededor de e', paralelo a $\overrightarrow{AA''}$, o sea a un movimiento helicoidal.

Tenemos, pues, que *todo movimiento en el espacio es un movimiento helicoidal.*

274. Aplicaciones.

EJEMPLO 1.—*Demostrar que por una recta* s *que se cruza con otra* r *pasa un plano paralelo a ella y sólo uno.*

Trazando por un punto P de s una paralela r' a r, determinamos el plano pedido, que es el que contiene a las rectas concurrentes s y r'. Cualquier otro análogo, el determinado por s y r'' (paralela a r por otro punto de s), coincide con el anterior por el paralelismo de r' y r''.

EJEMPLO 2.—*Demostrar que una traslación se puede siempre sustituir por dos giros.*

Sea una traslación que transforma A en A'. Tomemos A'', punto medio de AA'. En el plano mediador del segmento AA'' trazamos una recta e perpendicular a la guía AA' de la traslación. Efectuamos un giro con esta recta e como eje y una amplitud tal que lleve A sobre A''. Como eje del segundo giro tomamos la recta e', simétrica de e respecto de A'', y como amplitud del giro la misma del primero. El segundo giro llevará A en A', y el producto de los dos giros será la traslación $\overrightarrow{AA'}$.

EJEMPLO 3.—*Trazar por un punto* P *del espacio una recta que se apoye en otras dos rectas* a *y* b *que se cruzan.*

La recta pedida pertenece a los dos planos definidos por el punto *P* y cada una de las rectas *a* y *b*. Por tanto, la intersección de estos dos planos determina la solución del problema.

EJERCICIOS

1. Demuestra que el lugar geométrico de todas las paralelas a un plano π, por un punto exterior A' es otro plano paralelo.
2. Las intersecciones de dos planos paralelos con un tercero son rectas paralelas. Demuéstralo.
3. Si un plano corta una recta γ, corta a todas sus paralelas. ¿Por qué?
4. Demuestra que por un punto *P* exterior a una recta pasan infinitos planos paralelos a ella.
5. Construye una recta que corte a otras tres dadas.
6. Traza una recta que sea paralela a otra dada y que corte a dos rectas dadas que se cruzan.
7. Traza una recta que pase por un punto, sea paralela a un plano dado y corte a una recta dada no paralela a él.
8. Construye una recta que pase por un punto y sea paralela a dos planos dados no paralelos entre sí.
9. Halla el lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos rectas secantes.
10. Se definen tres traslaciones mediante tres vectores $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$, $\overrightarrow{OZ}$ dirigidos según tres ejes rectangulares. Demuestra que el producto de estas tres traslaciones es otra traslación definida por el vector $\overrightarrow{OA}$, que se pide determinar.
11. ¿Qué es el producto de una traslación por un giro de eje perpendicular a las guías de la traslación?
12. ¿Qué es el producto de dos movimientos helicoidales?
13. Si se gira un extremo de un segmento *A B*, dejando fijo el otro extremo, el punto medio experimenta un giro mitad. Demuéstralo.
14. Si un espejo gira alrededor de un eje de su plano, la imagen de una figura fija gira alrededor de un mismo eje un ángulo doble. Demuéstralo.
15. Dadas dos circunferencias superponibles en el espacio, demuestra que existen dos giros que transforman una en otra. Caso en que los planos de ambas son paralelos.
16. Dados dos vectores superponibles, $\vec{v}$, $\vec{v}'$, situados en dos planos paralelos π, π', halla un movimiento helicoidal que transforme $\vec{v}$ en $\vec{v}'$ y π en π'.
17. Halla el lugar geométrico de los ejes de los movimientos helicoidales paralelos a una recta dada que transformen un punto dado *A* en otro *A'* también dado.

26

LAS SIMETRIAS EN EL ESPACIO
PRODUCTO DE TRASLACIONES, GIROS Y SIMETRIAS

275. Simetría axial.

En esta transformación, dada una recta *r* llamada *eje de simetría,* a todo punto *A* del espacio se hace corresponder otro *A'* tal, que *r* corta al segmento *A A'*, y es su mediatriz (fig. 128).

Se comprueba inmediatamente que esta transformación es involutiva y que equivale a un giro de 180°. Es, pues, un *movimiento.*

Dos figuras simétricas respecto a un eje pueden siempre hacerse coincidir mediante un giro de 180°. Por ejemplo, las hélices de avión son simétricas respecto al eje de giro.

De la definición se desprende:

Todo punto P *del eje es doble. Toda recta* S *secante y normal al eje es doble. Todo plano* π *normal al eje es doble. Todo plano que pasa por el eje es doble.*

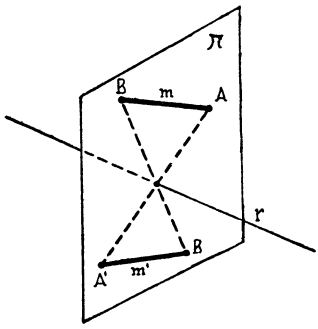


FIGURA 128

Los puntos homólogos en estos planos dobles son homólogos en una simetría central subordinada en cada uno de ellos, siendo el centro el punto P *de intersección del eje* r *con el plano.*

Además, toda recta *m* perpendicular al eje sin cortarle tiene como simétrica otra *m'* paralela a ella, porque en la simetría plana central se vió que la homóloga de una recta no doble era otra paralela.

276. Simetría central.

En esta transformación, dado un punto *O*, llamado *centro,* cualquier punto *A* del espacio se transforma en otro *A'*, alineado con *O* y con *A*, de modo que *O* sea punto medio del segmento *A A'*. Evidentemente, se trata de una transformación involutiva.

Esta transformación no es un movimiento. Se observa en la figura 129 que transforma un triedro en el opuesto por el vértice, pero invirtiendo el sentido; y dos triedros de ese tipo no son superponibles, según puede verse fácilmente en la referida figura.

Por tanto dos figuras simétricas respecto a un punto no pueden, en general, hacerse coincidir, a pesar de tener todos sus elementos iguales.

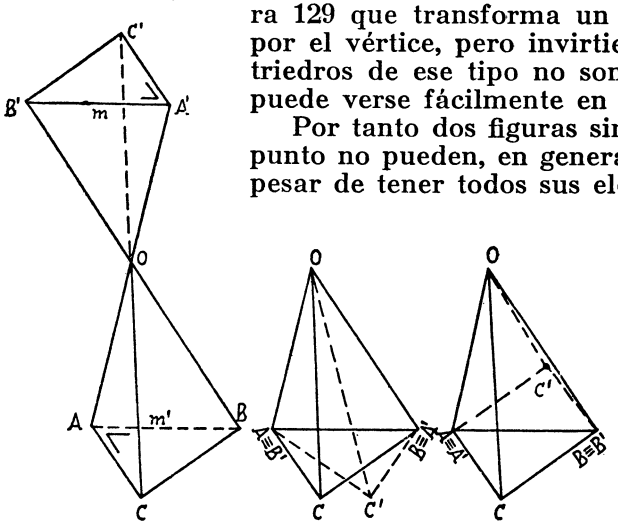


FIGURA 129

Los puntos *A* y *B* se transforman como en una simetría central plana en el plano determinado por *A*, *B* y *O*. De aquí que puntos alineados y ordenados se transforman en puntos también alineados y ordenados. Los segmentos simétricos son iguales, o, dicho de otra manera, los triángulos simétricos son iguales (por tener sus lados iguales). De donde se deduce también que los ángulos simétricos son iguales.

Las rectas y los planos que pasan por O son dobles. Las rectas que no pasan por O *se transforman en otras paralelas (simetría central plana). Los planos que no pasan por* O *se transforman en sus paralelos.* Pues si se cortasen, la recta de intersección sería doble (a la intersección de α con α' le corresponde la de α' con α, o sea ella misma), y al ser doble, debería pasar por *O*, lo que va contra la hipótesis de que el plano no contiene al centro.

277. Simetría especular.

Se llama así a la simetría respecto a un plano, por la propiedad que tienen las imágenes de los espejos planos.

En esta transformación, dado un plano π, todo punto *A* se transforma en otro *A'* de modo que π sea perpendicular a *A A'* en su punto medio (fig. 130).

De la definición se desprende:

La simetría especular es involutiva. Todas las figuras contenidas en π son dobles. Todas las rectas y planos perpendiculares a π son dobles.

Observando la figura se advierte que la simetría especular subordina en todo plano α, perpendicular a π, una simetría plana axial, cuyo eje es la intersección de α y π. Por tanto, a puntos alineados y ordenados A, B, C... corresponden simétricos A', B', C'... también alineados y ordenados.

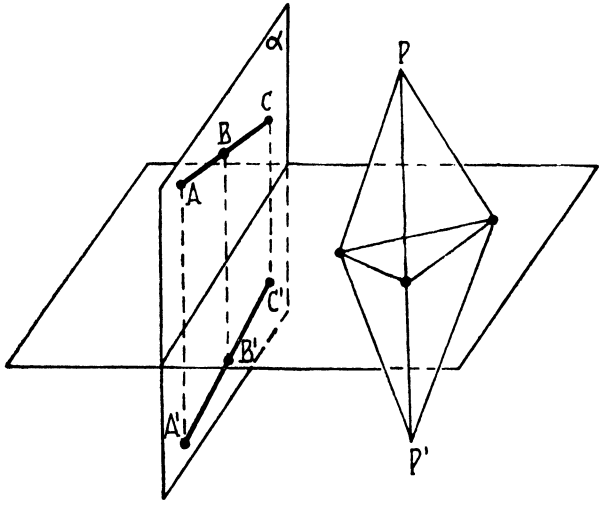


FIGURA 130

La simetría especular tampoco es un m o v i m i e n t o, pues al triedro que proyecta un triángulo de π desde un cierto punto P exterior a π corresponde el triedro inverso, que proyecta el mismo triángulo desde el simétrico de P.

Por tanto dos figuras simétricas respecto a un plano no pueden, en general, hacerse coincidir, a pesar de tener todos sus elementos iguales, debido a que dichos elementos están colocados en orden inverso. Así las dos manos o los dos pies de una persona son simétricos respecto a un plano. Y es de común observación que no pueden hacerse coincidir, que el guante de una mano no sirve para la otra, ni el zapato de un pie para el otro. Dios comunicó a la mayor parte de los seres vivos esta cualidad de la simetría, que es la que les comunica su belleza y armonía. El hombre en sus creaciones la ha imitado instintivamente: muebles, utensilios, edificios, etc., suelen ser figuras simétricas respecto a un plano.

278. Pseudomovimientos.

Hemos visto que tanto la simetría central como la especular son transformaciones puntuales que gozan de las propiedades siguientes: 1.° conservan las relaciones de incidencia y orden; 2.° invierten el sentido; 3.° transforman los segmentos, ángulos y diedros en otros iguales a ellos; 4.° son biunívocas.

Ya que estas propiedades, salvo la inversión del sentido, son también las del movimiento, denominaremos *pseudomovimiento* a toda

transformación que las cumpla. Y denominaremos *pseudoiguales* o *pseudocongruentes* a dos figuras homólogas en un pseudomovimiento. Por tanto: *las simetrías central y especular son pseudomovimientos.*

Es fácil comprobar que *el producto de dos pseudomovimientos es un movimiento,* pues invirtiendo el sentido dos veces consecutivas, se obtiene de nuevo el sentido directo. Es igualmente inmediato que *el producto de un movimiento por un pseudomovimiento es otro pseudomovimiento.* Luego:

Los movimientos y pseudomovimientos forman conjuntamente un grupo.

279. Aplicaciones.

EJEMPLO 1.—*Hallar el producto de dos simetrías respecto de dos planos paralelos.*

Ya hemos dicho que el producto de dos pseudomovimientos es un movimiento. Además, toda perpendicular común a los dos planos se transforma en sí misma en ambas simetrías. Luego el producto de las dos simetrías es un movimiento en el que son dobles un sistema de rectas paralelas, o sea es una *traslación.*

Recíprocamente, *toda traslación puede obtenerse de infinidad de maneras como producto de dos simetrías especulares.* Igualmente como producto de *dos simetrías centrales.*

EJEMPLO 2.—*Hallar el producto de dos simetrías respecto de dos planos secantes.*

El producto será un movimiento directo que tiene dobles todos los puntos de intersección de ambos planos, o sea, es un *giro* que tiene como eje la recta de intersección de los planos.

Recíprocamente, cualquier giro, lo mismo que cualquier traslación, puede obtenerse de infinitas maneras como producto de dos simetrías especulares.

Luego, todo movimiento helicoidal, y, por tanto, todo movimiento del espacio, puede obtenerse, de infinidad de maneras, como producto de cuatro simetrías especulares.

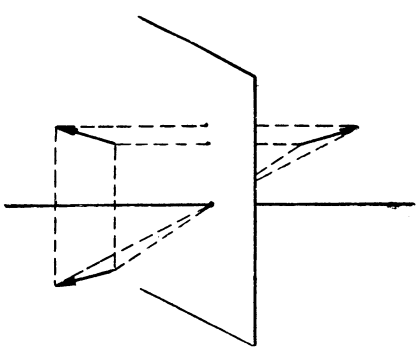


FIGURA 131

EJEMPLO 3.—*Demostrar que una figura carente de ejes de simetría no puede tener a la vez centro y plano de simetría.*

El problema quedará resuelto si demostramos que siempre que una figura tiene centro y plano de simetría, tiene eje de simetría.

Basta, para ello, la simple inspección de la figura 131, que muestra cómo el producto de una simetría central por una simetría especular respecto a un plano que pase por el centro es una simetría axial con eje perpendicular al plano de simetría por el centro.

280. Producto de dos simetrías axiales.

1.° Los ejes son paralelos.

Sea A un punto cualquiera de la figura F, A' su simétrico con relación a e, y A'' el simétrico de A' respecto a e' (fig. 132).

En el plano $A\,A'\,A''$ se tiene que $O\,O'$ es la paralela media del triángulo $A\,A'\,A''$; por tanto es paralelo a $A\,A''$ e igual a su mitad.

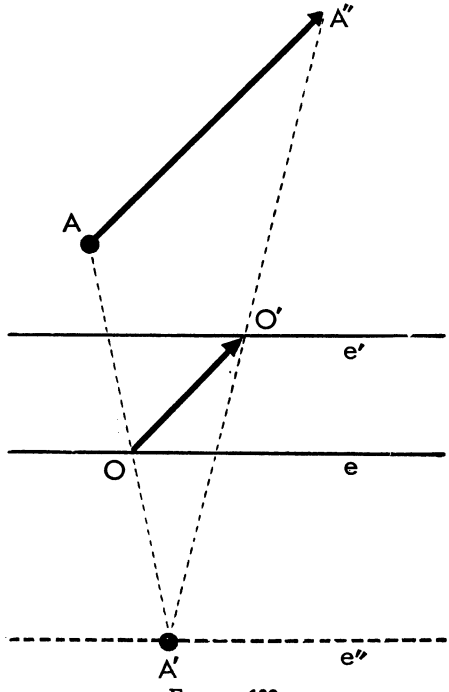


Figura 132

Además, por ser $A\,A'$ perpendicular a e en O, lo es también a su paralela e'' por A'. Del mismo modo $A'\,A''$ es perpendicular a e'' en A'. Luego el plano $A\,A'\,A''$ es perpendicular a e'', a e y a e'. Por tanto, el segmento $O\,O'$ es la distancia entre las paralelas e y e', por ser perpendicular a ambas.

La traslación definida por el vector $2\overrightarrow{O\,O'}$ lleva el punto A al A'' y cualquier punto de la figura F sobre su homólogo de F''. O sea:

El producto de dos simetrías respecto de dos rectas paralelas es una traslación definida por un vector cuya dirección es la perpendi-

cular a las dos rectas, su módulo el doble de la distancia entre ellas, y su sentido el que va de la primera a la segunda.

2.° Los ejes son concurrentes.—Sea A un punto de la figura F, A' su simétrico respecto al eje e, A'' el simétrico de A' respecto al eje e'. Sean B, B' y B'' las proyecciones de A, A' y A'' sobre el plano P determinado por e y e' (fig. 133).

Serán $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, pero de sentido opuesto; igualmente $\overline{A'B'} = \overline{A''B''}$, pero de sentido opuesto. Luego $\overline{AB} = \overline{A''B''}$, y del mismo

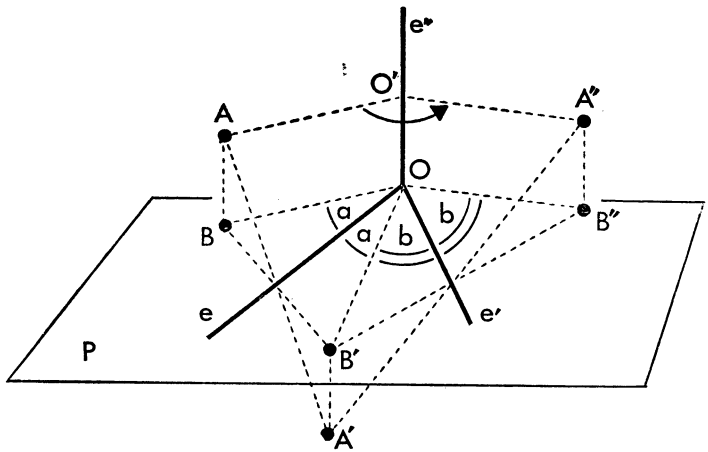


Figura 133

sentido. Los puntos A y A'' están sobre un plano paralelo a P, y por tanto perpendicular a e'', que lo es a P por O.

Se tendrá:

$$\widehat{BOB''} = AO'A'' = 2(a + b)$$

El giro definido por el eje e'' y de amplitud $2(a + b)$ lleva el punto A al A'' y cualquier punto de la figura F a su homólogo de F''. O sea:

El producto de dos simetrías respecto de dos rectas que se cortan es un giro alrededor de la recta perpendicular común, que corta a ambas, de amplitud igual al doble del ángulo que forma la primera con la segunda, con el sentido que va de aquélla a ésta.

3.° Los ejes se cruzan.—Sean las simetrías S de eje e y S' de eje e', cuando e y e' se cruzan. Tracemos, según se estudió en la Geo-

metría (véase nuestras *Prácticas de Matemáticas*, págs. 133 y 134) la perpendicular común $M\,M'$ a los dos ejes e y e' (fig. 134). Por M' tracemos la recta e'' paralela a e y consideremos la simetría S'' de eje e''. Ya que $S''^2 = 1$, se puede escribir

$$S' \cdot S = S' \cdot S''^2 \cdot S = (S'\,S'') \cdot (S''\,S)$$

Ahora bien, $S''\,S$ es una traslación T, definida por el vector $2\,\overrightarrow{M\,M'}$;

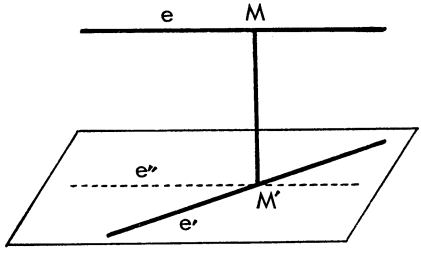


FIGURA 134

el producto $S'\,S''$ es un giro G alrededor de $M\,M'$, de amplitud igual al doble del ángulo que forman e' y e''. Luego

$$S'\,S = G \cdot T$$

El producto de dos simetrías respecto de dos ejes que se cruzan es igual al producto de un giro, alrededor de la perpendicular común y amplitud igual al doble del ángulo que forma la primera recta con la segunda y con el sentido que va de aquélla a ésta, por una traslación definida por un vector cuyo módulo es el doble de la mínima distancia entre las dos rectas, con la dirección de esta perpendicular común y con el sentido que va de la primera recta a la segunda.

Pero este producto de una traslación por un giro de eje paralelo al vector de aquél es un *movimiento helicoidal;* es decir:

El producto de dos simetrías respecto de dos ejes que se cruzan es un movimiento helicoidal.

281. Descomposición de movimientos en producto de simetrías axiales.

De lo anterior se deduce que:

1.° Toda traslación se puede descomponer de infinitos modos en producto de dos simetrías de ejes paralelos, de los cuales se puede

fijar arbitrariamente uno con la única condición de ser perpendicular al vector que define la traslación.

2.° Todo giro se puede descomponer de infinitos modos en producto de dos simetrías cuyos ejes se cortan en un punto del eje de giro, siendo perpendiculares a éste, y de los cuales se puede fijar arbitrariamente uno de ellos con la única condición de cortar perpendicularmente al eje de giro.

3.° Todo movimiento helicoidal se puede descomponer de infinitos modos en producto de dos simetrías cuyos ejes son perpendiculares al eje del movimiento helicoidal y de los cuales se puede fijar arbitrariamente uno de ellos con la condición de cortarle perpendicularmente.

282. El grupo de los movimientos helicoidales.

Los giros y traslaciones se pueden considerar como movimientos helicoidales. Una traslación es un movimiento helicoidal cuyo eje es paralelo al vector de la traslación y cuyo giro es de amplitud cero. Un giro es un movimiento helicoidal cuyo eje es el eje de giro y cuya traslación viene definida por el vector cero.

Así, podemos definir como *movimiento del espacio al producto de cualquier número de movimientos helicoidales.*

Sean dos movimientos helicoidales M y M', de ejes e y e', que se cruzan o no. Tracemos la recta e'' secante y perpendicular a e y e'. Podemos descomponer M en el producto de la simetría S'' de eje e'' y la simetría S_1 de eje e_1, que se puede hallar por lo anteriormente dicho, de modo que $M = S_1 \cdot S''$. Del mismo modo descomponemos M' en el producto $S'' \cdot S_2$, de ejes e_2 y e''. De donde

$$M \cdot M' = S_1 \cdot S'' \cdot S'' \cdot S_2 = S_1 \cdot S_2$$

ya que $S''^2 = 1$. Pero $S_1 S_2$ es otro movimiento helicoidal, luego

El producto de dos movimientos helicoidales es otro movimiento helicoidal.

Este producto es *asociativo,* por serlo siempre el producto de transformaciones biunívocas. Dicho producto tiene *elemento neutro,* M_0, que es el movimiento helicoidal cuya traslación viene definida por el vector nulo y cuyo giro tiene amplitud nula. Aplicado éste a cualquier otro movimiento M, se cumple que

$$M \cdot M_0 = M_0 \cdot M = M$$

Todo movimiento helicoidal M tiene otro *inverso* que representamos por M^{-1}, definido por el vector $-\mathbf{v}$ y por el giro $-\varphi$, y tal que

$$M^{-1} \cdot M = M \cdot M^{-1} = M_0$$

Por tanto, *el conjunto de todos los movimientos del espacio tiene estructura de grupo.*

EJERCICIOS

1. Halla el producto de dos simetrías axiales de ejes perpendiculares.
2. Halla el producto de una simetría axial por otra especular cuyo plano pasa por el eje. Idem de plano perpendicular al eje.
3. Halla el producto de una simetría axial por otra central de centro en el eje.
4. ¿Qué transformación se obtiene al multiplicar dos simetrías respecto de dos ejes paralelos?
5. El producto de una simetría de eje e por una traslación $\overrightarrow{AA'}$ de dirección perpendicular a e es otra simetría axial de eje e', paralela media de ee_1, siendo e_1 la recta homóloga de e en la traslación $\overrightarrow{AA'}$. Demuéstralo.
6. Todas las traslaciones de direcciones paralelas a un plano y las simetrías axiales de eje perpendicular forman un grupo no abeliano. Demuéstralo.
7. Si una figura tiene un plano π de simetría y un eje e de simetría oblicuo a él, la recta e', simétrica de e respecto de π, es también eje de simetría de la figura.
8. ¿Qué clase o clases de simetrías existen entre las dos manos?
9. Si una figura tiene dos planos de simetría no perpendiculares entre sí, tiene al menos un tercer plano de simetría. Demuéstralo.
10. El producto de una traslación $\overrightarrow{AB}$ por una simetría central O es otra simetría central O_1, tal que $O_1O = AB : 2$. ¿Y si se invierte el orden del producto?
11. Halla sobre un plano π un punto equidistante de tres puntos dados, exteriores al plano y no alineados.
12. Halla el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos de longitud constante cuyos extremos se apoyan en dos rectas que se cruzan ortogonalmente.
13. Halla el producto de dos simetrías axiales respecto de dos ejes secantes.
14. Halla una simetría axial en la que sean simétricas dos rectas dadas que se cruzan. Número de soluciones.

27

PROYECCIONES ORTOGONALES

283. Proyección ortogonal de un vector sobre un plano.

Proyección ortogonal de un punto A sobre un plano π es el pie A' de la perpendicular bajada desde A al plano (fig. 135).

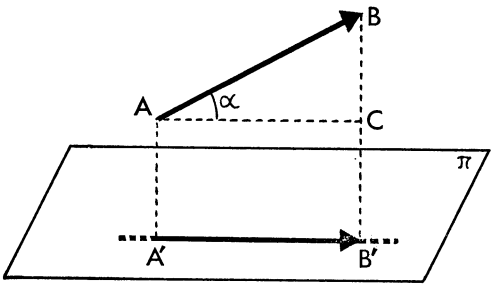


FIGURA 135

Proyección ortogonal de un vector $\overrightarrow{AB}$ sobre un plano π es otro vector $\overrightarrow{A'B'}$ cuyo origen y extremo son, respectivamente, las proyecciones del origen y extremo del vector dado.

Es fácil hallar la longitud de la proyección, conociendo la longitud del segmento AB y el ángulo α que éste forma con el plano.

En efecto, trazando por A la paralela a $A'B'$, se forma el triángulo ABC, cuyo ángulo A es precisamente igual al α, por definición de ángulo entre recta y plano. Luego

$$A'B' = AC = AB \cdot \cos \alpha$$

La proyección ortogonal de un vector sobre un plano tiene como módulo el producto de la longitud del segmento por el coseno del ángulo que su recta forma con el plano.

284. Proyección ortogonal de un vector sobre un eje orientado.

Proyección ortogonal de un punto A sobre un eje es el punto A' de intersección con el eje del plano perpendicular al eje trazado desde el punto (fig. 136).

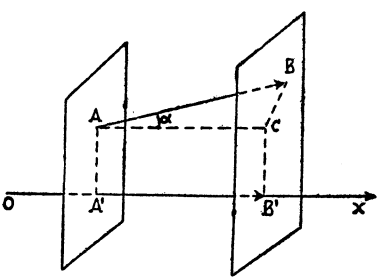


FIGURA 136

Proyección ortogonal de un vector $\overrightarrow{AB}$ sobre un eje orientado es otro vector $\overrightarrow{A'B'}$ cuyo origen y extremo son, respectivamente, las proyecciones del origen y extremo del vector dado.

Trazando por A una recta AC paralela al eje OX, interceptará entre los planos proyectantes un segmento $AC = A'B'$. El ángulo α que AB forma con AC es el mismo que forma con OX; luego en el triángulo rectángulo ABC, se tiene

$$\overline{A'B'} = \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \cos \alpha$$

La longitud de la proyección ortogonal de un vector sobre un eje es igual a la longitud del vector por el coseno del ángulo que forma con el sentido positivo del eje.

285. Cosenos directores de un vector.

El último teorema de proyección ortogonal se utiliza con frecuencia en la Geometría analítica del espacio, llamándose *componentes* de un vector a sus proyecciones ortogonales sobre tres ejes rectangulares, que forman triedro trirrectángulo, OX, OY y OZ (fig. 137). A todo punto del espacio P corresponden tres números x, y, z, denominadas *coordenadas del punto*, que son las proyecciones del vector OP sobre los respectivos ejes de coordenadas.

Se llaman *cosenos directores* de un vector a los cosenos de los ángulos α, β y γ que su vector equipolente OP forma con los ejes. Llamando r la longitud de dicho vector, se tiene

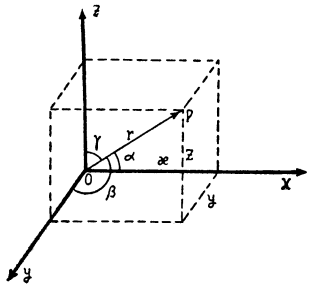


FIGURA 137

$$x = r \cos \alpha \quad ; \quad y = r \cos \beta \quad ; \quad z = r \cos \gamma$$

Elevando al cuadrado estas tres igualdades y sumando, resulta

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$$

Pero según el teorema de Pitágoras en el espacio (fig. 137), es

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Luego

$$r^2 = r^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$$

o sea

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

La suma de los cuadrados de los cosenos directores de un vector es igual a la unidad.

286. Proyección de una poligonal sobre un eje orientado.

En una línea poligonal (plana o no) cuyos lados son vectores tales que el extremo de cada uno es el origen del siguiente, tal como la *A B C D E F* (fig. 138), se denomina *suma* o *resultante*, al vector *A F* que une el origen del primer vector con el extremo del último. Los vectores que componen la línea poligonal se denominan sus componentes. Se tiene evidentemente, llamando *A'*, *B'*, *C'*, *D'*, *E'* y *F'* las proyecciones de los vértices o de la poligonal, que

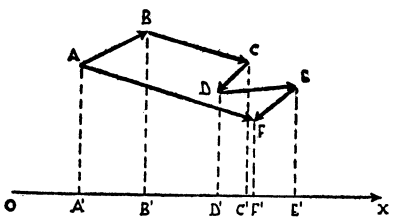


FIGURA 138

$$A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'F' + F'A' = 0 \qquad [1]$$

o sea: *la suma algebraica de las proyecciones de los lados de una poligonal cerrada orientada es nula.*

Trasponiendo al segundo miembro el último término de [1] resulta

$$A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'F' = - F'A' = A'F'$$

o sea: *la proyección de la resultante de una línea poligonal sobre un eje es igual a la suma algebraica de las proyecciones de los vectores componentes sobre dicho eje.*

287. Proyección ortogonal de un polígono plano sobre un plano.

Proyectando cada uno de los vértices del polígono sobre el plano, la quebrada cerrada que une estas proyecciones es el polígono proyección.

Estudiemos si se pueden relacionar las áreas del polígono primitivo y el polígono proyección.

Sea α el ángulo que forman los planos de ambos, y consideremos un *triángulo* en el primer plano que tenga *uno de sus lados paralelo al segundo*. El lado *a* es igual a su proyección, y la proyección *h'* de

la altura es igual a $h \cdot \cos \alpha$, por ser h perpendicular a a, y por tanto, línea de máxima pendiente que forma con π un ángulo α (fig. 139).

El área T' del triángulo proyección es, por tanto, llamando T al área del triángulo dado:

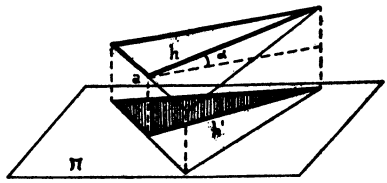


FIGURA 139

$$T' = \frac{1}{2} a \cdot h' = \frac{1}{2} a \cdot h \cos \alpha = T \cos \alpha$$

o sea, es igual *al área del triángulo primitivo multiplicada por el coseno del ángulo que forman ambos planos.*

Si el triángulo *no tiene ninguno de sus lados paralelos al plano* π (fig. 140), se descompone en dos triángulos que posean esa propiedad. Para ello desde el vértice B cuya distancia al plano π es inter-

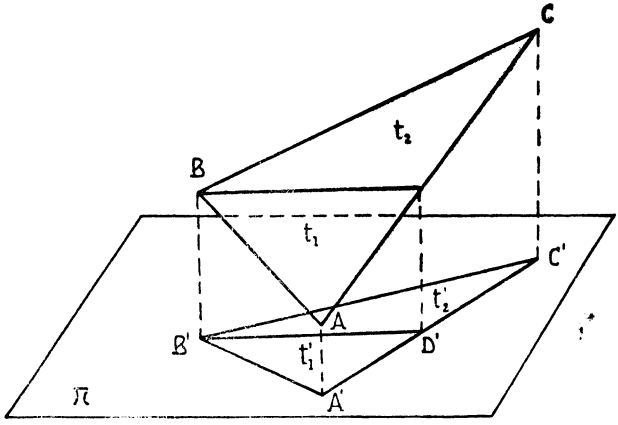


FIGURA 140

media (menor que la de C y mayor que la de A) se traza un plano α paralelo al π. El plano α corta al triángulo $A\,B\,C$ según la recta $B\,D$, paralela al plano π.

Así se ha descompuesto dicho triángulo en otros dos, t_1 y t_2, cuyas proyecciones son t'_1 y t'_2. A éstos se puede aplicar el teorema anterior, o sea

$$t'_1 = t_1 \cos \alpha \quad ; \quad t'_2 = t_2 \cos \alpha$$

Sumando

$$t'_1 + t'_2 = (t_1 + t_2) \cos \alpha$$

o sea

$$T' = T \cos \alpha$$

Como, por otra parte, todo polígono puede descomponerse en triángulos, la propiedad es válida en todo caso.

El área de la proyección de un recinto plano es igual al producto del área del recinto por el coseno del ángulo que forma su plano con el de proyección.

288. Aplicaciones.

EJEMPLO 1.—*Se proyecta ortogonalmente un triángulo de área* A *sobre cada uno de los tres planos de un sistema de coordenadas rectangulares. Determinar en función de* A *la suma de los cuadrados de las áreas de las tres proyecciones.*

Llamemos α, β y γ los cosenos directores de la normal al plano π de la figura plana dada. Ya que el ángulo de dos planos es igual al que forman sus normales, resulta que α, β y γ son precisamente los que forma el plano π con los tres planos coordenados.

Por tanto, llamando A', A'' y A''' las áreas de las tres proyecciones, tendremos

$$A' = A \cos \alpha \quad ; \quad A'' = A \cos \beta \quad ; \quad A''' = A \cos \gamma$$

Elevando al cuadrado y sumando

$$A'^2 + A''^2 + A'''^2 = A^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$$

Pero como, según el número 278, es

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

resulta

$$A'^2 + A''^2 + A'''^2 = A^2$$

EJEMPLO 2.—*La proyección ortogonal de un triángulo sobre un plano tiene un área igual a* $\sqrt{3}$R, *siendo* R *el radio del círculo circunscrito al triángulo dado. El producto de los lados de dicho triángulo es igual a 8 cm*^{3}. *Calcular el ángulo que forman los dos planos: el del triángulo y el de proyección.*

Llamando a, b y c los lados del triángulo dado, se sabe que su área vale

$$S = \frac{a\,b\,c}{4\,R} = \frac{8}{4\,R} = \frac{2}{R}$$

El área S' del triángulo proyección es

$$S' = \frac{\sqrt{3}}{R} = \frac{2}{R} \cos \alpha$$

Luego

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cdot \quad \alpha = 30°$$

que es el ángulo pedido.

EJEMPLO 3.—*Un decágono regular está inscrito en una circunferencia de radio 8 cm., y se proyecta sobre un plano que forma con el suyo un ángulo de 45°. Hallar el área de la proyección.*

El lado del decágono vale

$$l = \frac{r(\sqrt{5}-1)}{2} = \frac{8(\sqrt{5}-1)}{2} = 4(\sqrt{5}-1)$$

y la apotema

$$a = \frac{r}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = 2 \cdot \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

Luego su área es

$$S = \frac{10 \cdot 4(\sqrt{5}-1) \cdot 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{2} =$$

$$= 40(\sqrt{5}-1)\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} =$$

$$= 40\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2 \cdot 2(5 + \sqrt{5})} = 40\sqrt{2(\sqrt{5}-1) \cdot 4\sqrt{5}} =$$

$$= 80\sqrt{2}\sqrt{5 - \sqrt{5}}$$

El área de la proyección vale

$$S' = S \cos 45° = 80\sqrt{2}\sqrt{5 - \sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 80\sqrt{5 - \sqrt{5}}$$

EJERCICIOS

1. Dos planos perpendiculares entre sí se cortan por un tercero. Halla cuándo las intersecciones de ambos sobre este último son perpendiculares.
2. El ángulo que forma una recta con su proyección sobre un plano es menor que el que forma con cualquier otra recta trazada por su pie en dicho plano. Demuéstralo.

3. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos de un plano cuya distancia a un punto P situado a 10 metros del plano varía entre 15 y 20 metros?

4. Demuestra que la suma de los cuadrados de las proyecciones de un segmento sobre tres ejes, ortogonales dos a dos, es igual al cuadrado de dicho segmento.

5. Un triángulo $A\,B\,C$ se proyecta sobre un plano π según un triángulo equilátero $A\,B'\,C'$, de 12 dm. de lado. Sabiendo que los segmentos $B\,B'$ y $C\,C'$ de las rectas proyectantes miden 12 dm. y 6 dm., respectivamente, 1.°, demuestra que la altura del triángulo $A\,B\,C$. que pasa por C, se proyecta en su verdadera magnitud; 2.°, halla el valor del ángulo que forma el plano π con el del triángulo $A\,B\,C$.

6. Dos planos α y β se cortan ortogonalmente según una recta $M\,N$. El segmento $A\,B$ que une un punto A del primer plano con otro punto B del segundo plano, mide $\sqrt{6}$ cm., y forma un ángulo de 30° con el α, y un ángulo de 45° con el β. Halla la mínima distancia entre las rectas $A\,B$ y $M\,N$.

7. En cursos superiores se demuestra que la proyección de una circunferencia sobre un plano no paralelo al que la contiene es una elipse. Deduce la fórmula del área de la elipse.

8. ¿Cuál es el lugar geométrico de las proyecciones de un punto P dado en el espacio sobre las rectas trazadas en un plano por un punto fijo A de éste?

9. Sobre las aristas de un triedro trirrectángulo fijo $S\,A\,B\,C$ se toman los puntos A, B, C, trazándose la perpendicular $S\,H$ al plano $A\,B\,C$ (H pie de $S\,H$ sobre este plano). Demuestra:

$$\frac{1}{S\,H^2} = \frac{1}{S\,A^2} + \frac{1}{S\,B^2} + \frac{1}{S\,C^2}$$

28

LA GEOMETRIA SOBRE LA SUPERFICIE ESFERICA

289. Circunferencias máximas y menores.

Del mismo modo que se estudian las figuras situadas en un plano, lo que constituye la Geometría plana, se pueden considerar las figuras trazadas en la superficie esférica, lo que constituye la Geometría esférica.

Así como en la Geometría plana se trata de las figuras más sencillas, como rectas, segmentos, triángulos, etc., así en la Geometría esférica estudiaremos las figuras más sencillas: *circunferencias máximas* y *circunferencias menores* y las que con los arcos de las mismas pueden formarse, ya que en la superficie esférica no puede trazarse ninguna recta.

Circunferencia máxima es la que tiene su centro en el mismo centro de la esfera. Es la intersección de la esfera con un plano que pasa por su centro. Para simplificar a las circunferencias máximas las denominaremos *ciclos*.

Circunferencia menor es aquella cuyo plano no pasa por el centro de la esfera.

290. Distancia esférica entre dos puntos de una superficie esférica.

Supongamos que por dos puntos A y B, no diametralmente opuestos, de una superficie esférica se han trazado una circunferencia menor y un ciclo. Siempre existe un ciclo, y sólo uno, que pasa por A y B (fig. 141).

En efecto, los puntos A, B y O determinan un plano, cuya intersección con la esfera constituye el ciclo pedido.

El radio de este ciclo es igual al radio de la esfera, mientras que el radio de cualquier circunferencia menor es menor que el radio de la esfera. Por tanto, si abatimos el plano de la circunferencia menor sobre el del ciclo, alrededor de la cuerda común $A\,B$ (fig. 142), resultará que el arco $A\,B$ del ciclo será interior al de la circunferen-

cia menor, y por ser ambos convexos, este último será mayor que el primero.

En efecto, se tiene

$$\text{long } \overset{\frown}{A\,H\,B} < \text{long } A\,C\,F\,B < \text{long } A\,C\,D\,E\,F\,B < \text{long } \overset{\frown}{A\,D\,E\,B}$$

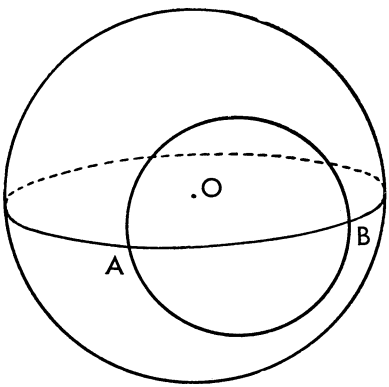


FIGURA 141

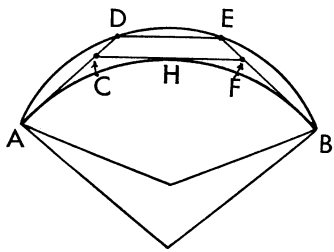


FIGURA 142

La longitud de un arco de ciclo, inferior a un semiciclo, es menor que la longitud de cualquier arco de circunferencia menor con los mismos extremos.

Lo mismo se demuestra para cualquier otra línea que pasa por A y B: el arco de ciclo $A\,B$ da la longitud mínima sobre la superficie esférica entre A y B. Por eso se llama *distancia esférica* entre dos puntos A y B de la superficie esférica a la longitud del menor arco de ciclo comprendido entre A y B.

291. Angulo esférico.

Sea un semiciclo $P\,B\,P'$, y otro semiciclo $P\,C\,P'$ (fig. 143). Dos ciclos siempre se cortan en dos puntos P y P' diametralmente opuestos de la esfera.

En efecto, ya que los planos de los dos ciclos pasan por el centro O de la esfera, se cortan según un diámetro cuyos extremos P y P' pertenecen a los dos ciclos.

Se llama *ángulo esférico* de dos ciclos al formado por las dos tangentes a las semicircunferencias en uno de sus puntos de contacto, por ejemplo, el P.

Ya que dichas tangentes son perpendiculares al diámetro $P\,P'$, el ángulo esférico α es el rectilíneo correspondiente al diedro formado por los planos de las dos semicircunferencias. Si trazamos la circunferencia máxima $A\,B\,C\,D$ perpendicular al diámetro $P\,P'$, y llamamos B y C su intersección con las semicircunferencias primitivas, resulta que el ángulo $B\,O\,C$ es también el rectilíneo corres-

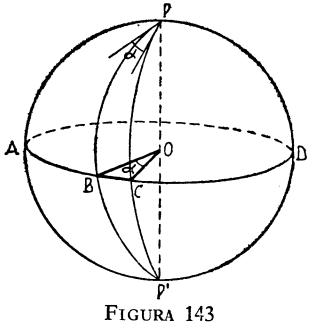


FIGURA 143

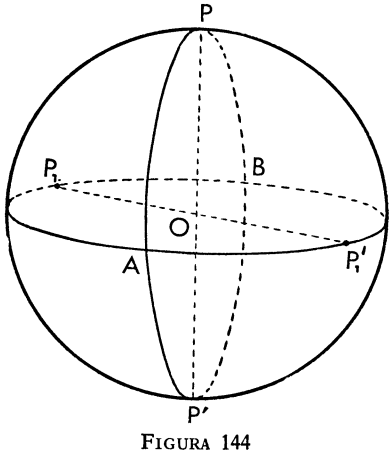


FIGURA 144

pondiente al diedro citado, y vale por tanto α. Siendo $B\,O\,C$ un ángulo central en la circunferencia $A\,B\,C\,D$, su medida es la misma que la del arco $B\,C$.

Luego *el ángulo esférico* α *mide lo mismo que el diedro que forman los planos de sus lados, y que el arco que éstos interceptan sobre la circunferencia máxima perpendicular al diámetro* $P\,P'$

292. Ciclos perpendiculares.

Se llaman *polos* de un ciclo a los extremos del diámetro perpendicular a su plano, trazado por el centro O de la esfera. Así, en la figura 143, P y P' son los polos del ciclo $A\,B\,C\,D$. Todo ciclo posee, por tanto, dos polos.

Sea un ciclo $A\,P'_1\,B\,P_1$ (fig. 144) y otro $P\,A\,P'\,B$ que pasa por los polos P y P' del primero. El plano de este segundo ciclo, por contener el diámetro $P\,P'$, perpendicular al plano del primer ciclo, forma un diedro recto con dicho plano. Por tanto, es recto el ángulo esférico formado por los dos ciclos, y se dice que éstos son *perpendiculares*.

Recíprocamente, si dos ciclos son perpendiculares, cada uno pasará por los polos del otro. Ya que los planos que los contienen han de ser perpendiculares, y, por ejemplo, el plano $A\,P'_1\,B\,P_1$ ha de contener la perpendicular $P_1\,P'_1$ al plano $P\,A\,P'\,B$, trazada por un punto O de la arista común a los dos planos.

La condición necesaria y suficiente para que dos ciclos sean perpendiculares es que uno de ellos pase por los polos del otro, en cuyo caso éste pasa por los polos de aquél.

293. Construcción de un círculo menor.

Tomemos una pizarra esférica o esfera apizarrada y veamos cómo se procede para trazar en ella un círculo menor.

Se demuestra en la Geometría elemental (véase nuestras Matemáticas 4.° Curso, núm. 189) que toda sección plana de una esfera es una circunferencia cuyos puntos equidistan de los extremos P y P' del diámetro perpendicular a la sección. Los puntos P y P' se llaman *polos* de la circunferencia considerada. De aquí se deduce la construcción de un círculo menor: basta hacer centro en un punto cualquiera P y con un radio cualquiera menor que la cuerda del cuadrante, describir con el otro extremo de la cuerda o la otra rama del compás de ramas curvas, provista de una tiza, una circunferencia.

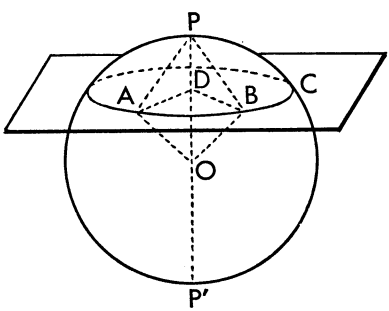


FIGURA 145

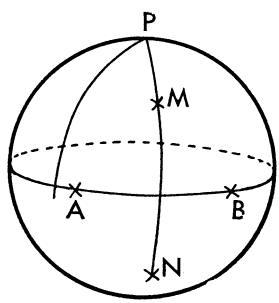


FIGURA 146

294. Construcción de un ciclo.

En la pizarra esférica tomemos dos puntos A y B. Coloquemos entre ellos una cuerda tensa espolvoreada de tiza. Al dar un tirón, quedará marcado un arco de ciclo entre A y B. Haciendo centro en A y B con radio cualquiera y trazando arcos que se corten obtenemos M y N que pertenecen al plano mediador de $\overset{\frown}{A\,B}$. Haciendo centro

en M y N con cuerda mayor, vamos obteniendo nuevos puntos del ciclo buscado y ampliando cada vez más éste hasta cerrarlo. Construyendo del mismo modo dos ciclos perpendiculares al $A\,B$, obtenemos el polo P de este último, que nos permite determinar la cuerda del cuadrante.

En adelante, esta cuerda del cuadrante nos permitirá trazar todos los ciclos que queramos.

295. Distancia esférica de un punto a un ciclo.

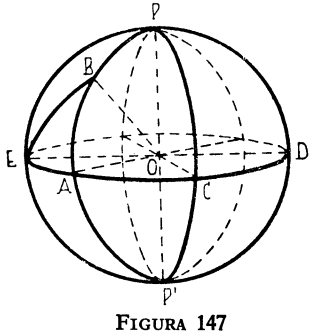


FIGURA 147

Sea $A\,C$ una circunferencia máxima y P, P' sus polos. Todas las circunferencias máximas perpendiculares a $A\,C$ pasan por P y P', pues el lugar de los planos diametrales perpendiculares a $A\,C$ es el haz de arista $P\,P'$ (fig. 147).

Así, dando un punto B, que no esté en la recta $P\,P'$, sólo hay una circunferencia máxima que pase por él, perpendicular a $A\,C$. Porque sólo hay un plano diametral que pase por P, P' y B.

Al arco $A\,B$ se denomina entonces *distancia de* B *a la circunferencia* A C, por ser menor que cualquier otro arco $B\,E$ de circunferencia máxima que une B con un punto E de $A\,C$. En efecto, $\widehat{A\,O\,B} < \widehat{E\,O\,B}$, por ser $\widehat{A\,O\,B}$ el ángulo que forma la recta $O\,B$ con el plano $E\,A\,C\,D$, o sea con su proyección $O\,A$ sobre el mismo, menor que el que forma con cualquier otra recta $O\,E$ de dicho plano.

296. La Geometría sobre la esfera.

Por lo dicho anteriormente se ve que existen estrechas analogías entre la Geometría sobre el plano y la Geometría sobre la esfera. Así veremos que *la distancia esférica entre dos puntos* A *y* B *es el camino más corto que se puede seguir para ir de uno a otro sobre la superficie esférica.*

El arco de circunferencia máxima desempeña, por tanto, en la esfera el mismo papel que la recta en el plano. Y se puede desarrollar una Geometría esférica análoga a la Geometría plana.

Existen, no obstante, notables diferencias entre una y otra. Así, en el plano dos perpendiculares a una recta son *paralelas*. En cambio en la esfera dos circunferencias máximas, perpendiculares a

otra, se cortan en los polos P y P' de la misma (fig. 147). En la Geometría esférica no existen, pues, "rectas" paralelas. Se trataría, por tanto, de una *Geometría no euclídea,* en la que habría que suprimir el postulado de Euclides sobre las paralelas.

Sin embargo, a pesar de vivir sobre la Tierra, que es aproximadamente esférica, ya que hemos de desenvolvernos en una región muy pequeña de su superficie, y ya que su radio es tan grande, o sea su curvatura tan pequeña que no puede apreciarse con los mejores aparatos de medida, nuestra Geometría coincide prácticamente con la euclídea.

297. Triángulos esféricos.

Se llama *triángulo esférico* a la porción de superficie esférica comprendida entre tres arcos de circunferencia máxima que se cortan dos a dos.

Los tres arcos $A\,B$, $A\,C$ y $B\,C$ del triángulo $A\,B\,C$ (fig. 148) se llaman *lados* del mismo, y los tres puntos A, B y C de intersección son los *vértices* del triángulo. Uniendo los tres vértices con el centro O de la esfera se obtiene un triedro $O\,A\,B\,C$, que tiene estrechas relaciones con el triángulo esférico $A\,B\,C$.

En efecto, los *lados* del triángulo, $A\,B$, $A\,C$ y $B\,C$, tienen igual medida que las *caras* del triedro, $A\,O\,B$, $A\,O\,C$ y $B\,O\,C$, respectivamente. Y los *ángulos* del triángulo, α, β y γ, tienen igual medida que los diedros del triedro, $O\,A$, $O\,B$ y $O\,C$. Según esto *a cada propiedad de los ángulos triedros corresponde una propiedad análoga de los triángulos esféricos.* (Véase nuestras Matemáticas de 4.° curso.)

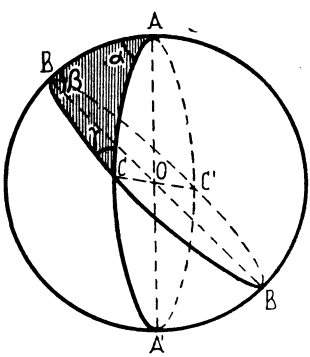


FIGURA 148

298. Propiedades de los triángulos esféricos.

1.ª *Cualquiera de los lados de un triángulo esférico es menor que una semicircunferencia,* ya que una cara de su triedro correspondiente es siempre menor que dos rectos.

2.ª *La suma de los lados de un triángulo esférico es menor que cuatro rectos,* porque las caras de un triedro suman menos que cuatro rectos.

3.ª *Todo lado de un triángulo esférico es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia,* pues una cara de su triedro correspondiente es menor que la suma de las otras dos y mayor que su diferencia.

4.ª *La suma de los ángulos de un triángulo esférico es mayor que dos rectos y menor que seis rectos,* ya que la suma de los diedros de un triedro está comprendida entre dos y seis rectos.

5.ª *En un triángulo esférico a lados iguales se oponen ángulos iguales, y a mayor lado se opone mayor ángulo.* Y recíprocamente.

299. Triángulos esféricos simétricos.

Ya que un triedro tiene tres caras, los planos de las mismas dividen a la superficie esférica en ocho triángulos, cuya denominación es la siguiente: los triángulos $A\,B\,C'$, $A\,B'\,C$ y $A'\,B\,C$ (fig. 148) son *adyacentes* del triángulo $A\,B\,C$, por tener con él un lado común; los triángulos $A'\,B'\,C$, $A'\,B\,C'$ y $A\,B'\,C'$ son adyacentes del triángulo $A'\,B'\,C'$, el cual se denomina *simétrico* del $A\,B\,C$.

Dos triángulos simétricos $A\,B\,C$ y $A'\,B'\,C'$ tienen todos sus elementos iguales, pero situados en orden inverso, lo mismo que sus triedros correspondientes, por lo cual en general no son superponibles: son *pseudocongruentes*. Son superponibles en algunos casos particulares, por ejemplo, cuando son isósceles, ya que lo mismo sucede con los triedros.

Es fácil demostrar que, en cualquier caso, *dos triángulos simétricos encierran igual área.* En efecto (fig. 149), todo triángulo $A\,B\,C$ puede descomponerse en suma o diferencia de tres triángulos isós-

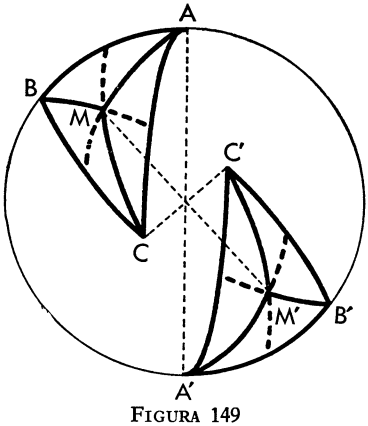


FIGURA 149

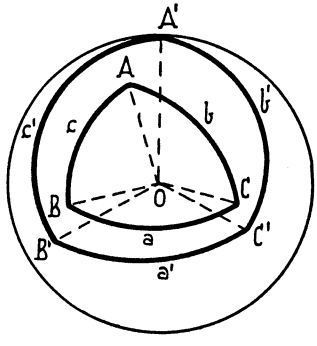


FIGURA 150

celes $M\,A\,B$, $M\,A\,C$ y $M\,B\,C$, uniendo sus vértices con el circuncentro del triángulo (punto de concurso de las mediatrices de los lados, o sea circunferencias máximas perpendiculares en sus puntos medios). El triángulo simétrico $A'\,B'\,C'$ admite una descomposición análoga en los tres triángulos isósceles $M'\,A'\,B'$, $M'\,A'\,C'$ y $M'\,B'\,C'$, simétricos de los anteriores, y por tanto superponibles con ellos.

300. Triángulos polares.

Dado un triángulo $A\,B\,C$ (fig. 150) hallamos el polo C' del arco $A\,B$ más próximo al vértice C. Del mismo modo determinemos el polo B' del lado $A\,C$ y el polo A' del lado $B\,C$. El triángulo $A'\,B'\,C'$, así formado con los polos de los tres lados del triángulo $A\,B\,C$, se denomina *triángulo polar* del dado.

Pero observamos que el triedro $O\,A'\,B'\,C'$, correspondiente al triángulo $A'\,B'\,C'$, es suplementario del triedro $O\,A\,B\,C$, ya que sus aristas son perpendiculares a las caras de este último. Luego *a toda propiedad de los triedros suplementarios* (véase nuestras Matemáticas de 4.° curso) *corresponderá una propiedad análoga de los triángulos polares.* Por tanto:

1.° *Si* A' B' C' *es el triángulo polar del* A B C, *éste a su vez es el triángulo polar del* A' B' C', porque si las aristas de éste son perpendiculares a las caras del $A\,B\,C$, las aristas de éste son perpendiculares a las caras de aquél.

2.° *En dos triángulos polares los lados de cada uno son suplementarios de los ángulos del otro.* Es decir, si llamamos A, B y C los ángulos y a, b y c los lados opuestos de un triángulo (fig. 150), y A', B' y C', a', b' y c' los de su triángulo polar, se tendrá

$$A + a' = 180^\circ \quad ; \quad B + b' = 180^\circ \quad ; \quad C + c' = 180^\circ$$

$$a + A' = 180^\circ \quad ; \quad b + B' = 180^\circ \quad ; \quad c + C' = 180^\circ$$

301. Criterios de igualdad de triángulos esféricos.

Son los mismos que los criterios de igualdad de triedros, de los cuales se deducen:

1.° *Dos triángulos esféricos son iguales si tienen iguales dos lados y el ángulo comprendido.*

2.° *Dos triángulos esféricos son iguales si tienen iguales un lado y los dos ángulos adyacentes.*

3.° *Dos triángulos esféricos son iguales si tienen sus tres lados respectivamente iguales.*

4.º *Dos triángulos esféricos cuyos ángulos sean iguales son iguales.*

NOTA.—En los cuatro casos se entiende indistintamente por igualdad la congruencia o la pseudocongruencia, es decir, los dos triángulos iguales serán superponibles, o será uno de ellos superponible con el simétrico del otro, según que los triedros de que procedan sean del mismo o de opuesto sentido.

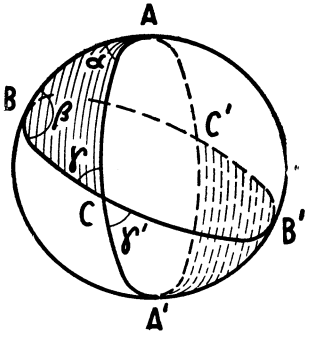


FIGURA 151

302. Area de un triángulo esférico.

Observamos en la figura 151 que los cuatro triángulos $A\,B\,C$, $B\,C\,A'$, $A\,C\,B'$ y $C\,A'\,B'$ constituyen la mitad de la superficie esférica, o sea, llamando S, S', S'' y S''' sus áreas,

$$S + S' + S'' + S''' = 2\pi r^2$$

Llamemos S_1 al área del triángulo $A'\,B'\,C'$, que por ser simétrico del $A\,B\,C$, tiene igual área que él, o sea $S_1 = S$. Sumemos $2S$ a los dos miembros de la igualdad anterior:

$$(S + S') + (S + S'') + (S_1 + S''') = 2\pi r^2 + 2S$$

Cada paréntesis del primer miembro es el área de un huso esférico. Por tanto

$$\frac{\pi r^2 \alpha}{90^o} + \frac{\pi r^2 \beta}{90^o} + \frac{\pi r^2 \gamma}{90^o} = 2\pi r^2 + 2S$$

de donde

$$S = \frac{\pi r^2 \alpha}{180^o} + \frac{\pi r^2 \beta}{180^o} + \frac{\pi r^2 \gamma}{180^o} - \pi r^2$$

o sea

$$\mathbf{S = \frac{\pi r^2}{180^o}(\alpha + \beta + \gamma - 180^o)}$$

El último paréntesis es siempre positivo, pues se ha visto que la suma de los ángulos de un triángulo esférico está comprendida entre dos y seis rectos. La expresión $\alpha + \beta + \gamma - 180$ se llama *exceso esférico* y se presenta por ε.

Así el área de un triángulo esférico es $\dfrac{\pi r^2 \varepsilon}{180^o}$

Si los ángulos se expresan en radianes, como a 360° corresponden 2π radianes, a 180° corresponden π, y a un grado $\frac{\pi}{180^\circ}$; luego

$$S = \frac{\pi r^2}{180^\circ}(\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ) = r^2\left(\frac{\pi\alpha}{180^\circ} + \frac{\beta\pi}{180^\circ} + \frac{\pi\gamma}{180^\circ} - \pi\right) =$$

$$= r^2(\alpha' + \beta' + \gamma' - \pi) = r^2\varepsilon' \qquad [2]$$

donde α', β', γ' y ε' están expresados en radianes.

303. Area de un polígono esférico.

Se llama *polígono esférico* a la porción de superficie esférica comprendida entre una poligonal cerrada, cuyos lados son arcos de circunferencia máxima.

Sea el cuadrilátero esférico *A B C D* (figura 152) cuya área queremos determinar. Tracemos el arco de circunferencia máxima *A C*, que lo divide en dos triángulos esféricos. El área pedida valdrá:

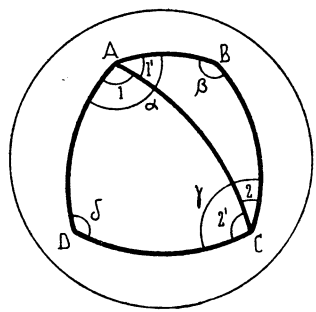


FIGURA 152

$$S = r^2(\hat{1} + \delta + \hat{2'} - \pi) + r^2(\hat{2} + \beta + \hat{1'} - \pi) =$$

$$= r^2(\hat{1} + \hat{1'} + \beta + \hat{2} + \hat{2'} + \delta - 2\pi) = (\alpha + \beta + \gamma + \delta - 2\pi)\, r^2$$

Si el polígono tiene n lados, se puede descomponer en $n - 2$ triángulos, y supuestos sumados todos los excesos esféricos, expresados en radianes, resultará

$$S = r^2[\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots + \varphi - (n - 2)\pi] \qquad [3]$$

304. Propiedades de los polígonos esféricos.

Uniendo los vértices de un polígono esférico con el centro *O* de la esfera, resulta un ángulo poliedro *O A B C D*, cuyos diedros tienen igual medida que los ángulos α, β, γ y δ del polígono, y cuyas caras miden lo mismo que los lados del polígono. Por tanto *a toda propiedad del ángulo poliedro corresponderá una propiedad análoga del polígono esférico.* Así:

1.° *La suma de los lados de un polígono esférico convexo es menor que cuatro rectos.* Un polígono esférico se llama *convexo* cuando lo es el ángulo poliedro de que proviene.

2.º *La suma de los ángulos de un polígono convexo de* n *lados está comprendida entre* 2n *rectos y* 2n — 4 *rectos.*

3.º *Un lado de un polígono esférico es menor que la suma de los demás.* He aquí una consecuencia interesante de esta propiedad:

Supongamos un arco de circunferencia máxima entre dos puntos *A* y *B* de una esfera (fig. 153) y otra curva cualquiera *A C D E B*, trazada sobre la misma esfera. Tracemos los arcos de circunferencia máxima *A C*, *C D*, *D E* y *E B*, de modo que formen con *A B* un polígono esférico. Se tendrá, según la propiedad anterior

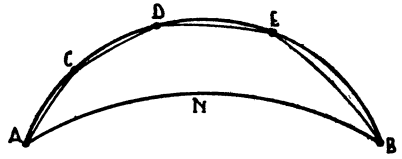


FIGURA 153

$$AB < AC + CD + DE + EB$$

Hagamos que la poligonal esférica inscrita aumente indefinidamente el número de sus lados, tendiendo a cero cada uno de ellos. Su límite será la curva *A C D E B*, y en el límite seguirá siendo el arco *A N B* menor que esta curva. Luego *el camino más corto para ir sobre una esfera de un punto* A *a otro* B *de la misma es la distancia esférica* A N B.

305. Noción de ángulo sólido.

Según lo dicho anteriormente es fácil ver que a ángulos poliedros iguales (o pseudoiguales) corresponden polígonos esféricos iguales. Y a un ángulo poliedro suma de otros dos corresponde un polígono esférico suma de los dos correspondientes a los sumandos. Podemos, por tanto, considerar los ángulos poliedros como magnitudes absolutas proporcionales a los polígonos esféricos que interceptan en una esfera de centro en su vértice, y medirlos mediante éstos. En estas consideraciones se basa esta definición:

Angulo sólido de un ángulo poliedro es el área del polígono esférico interceptado por él en una superficie esférica de centro en su vértice y de radio unidad.

Esta definición se generaliza inmediatamente a una *superficie cónica*, sea o no de revolución. Así:

Angulo sólido de un cono cualquiera, o de cualquier porción del espacio limitado por superficies cónicas, es el área de la figura esférica que intercepta sobre la superficie esférica de centro en su vértice y de radio unidad.

Este concepto es de la mayor importancia y de aplicación constante en luminotecnia, electricidad y otras ramas de la Física.

La unidad de ángulo sólido es el *estereorradián*, que es el que corresponde a la unidad cuadrada de área.

306. Defecto esférico.

La suma $a + b + c$ de los lados de un triángulo esférico vale menos de 4 rectos. Por analogía con los triángulos planos se le llama *perímetro* y se representa por $2p$.

A la diferencia, siempre positiva, $360^\circ - 2p$, la llamaremos *defecto esférico*, y lo representaremos por d.

Como hemos visto, los lados de un triángulo esférico son suplementarios de los ángulos de su polar, luego (núm. 300)

$$a' = 180^\circ - A \qquad b' = 180^\circ - B \qquad c' = 180^\circ - C$$
$$A' = 180^\circ - a \qquad B' = 180^\circ - b \qquad C' = 180^\circ - c$$

Veamos cuánto valen el defecto y el exceso del triángulo polar.

$$\varepsilon_p = 180^\circ - a + 180^\circ - b + 180^\circ - c - 180^\circ =$$
$$= 360^\circ - (a + b + c) = d$$

$$d_p = 360^\circ - (180^\circ - A + 180^\circ - B + 180^\circ - C) =$$
$$= A + B + C - 180^\circ = \varepsilon$$

Es decir, que *el exceso esférico de un triángulo es igual al defecto de su polar, y viceversa.*

307. Aplicaciones.

EJEMPLO 1.—*Trazar sobre la esfera un círculo máximo que pase por dos puntos dados* A *y* B.

Hay que determinar primeramente el polo P del círculo máximo AB (figura 154). Para ello hay que observar que la distancia de P a cada uno de los puntos A y B es igual a la cuerda del cuadrante del círculo máximo de dicha esfera. Por tanto, mediante el compás esférico o compás de ramas curvas, haciendo centro en A y en B, y con una abertura de compás igual a la cuerda del cuadrante, describiremos dos arcos, cuya intersección es P. Haciendo ahora centro en P y con la misma abertura del compás se describirá el arco máximo AB.

EJEMPLO 2.—*Trazar una circunferencia máxima mediatriz de un arco de circunferencia máxima* M N *dada* (fig. 154).

Con una abertura de compás cualquiera (mayor que la mitad de la cuerda correspondiente al arco MN) y haciendo centro en M y N se trazan dos arcos a un lado y otro de MN. Sus intersecciones dan los puntos A y B. El círculo máximo que pasa por A y B resuelve el problema.

EJEMPLO 3.—*Determinar el círculo menor que pasa por tres puntos dados* A, B *y* C *de una esfera* (fig. 155).

El polo P de dicho círculo ha de equidistar de A, B y C. Por tanto está en la intersección de las mediatrices de los arcos de círculo máximo AB, AC y BC.

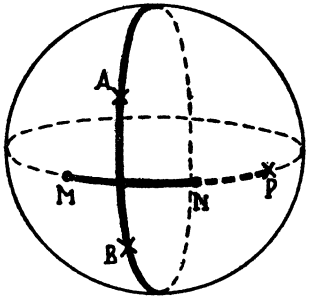


FIGURA 154

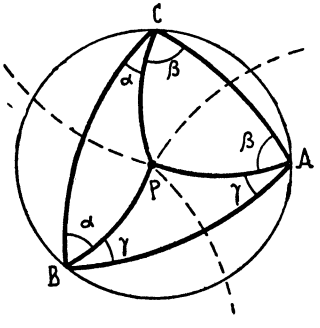


FIGURA 155

Una vez hallado P, se describirá el círculo menor pedido con una abertura de compás igual a PA. El polo P es el *circuncentro* del triángulo esférico ABC.

EJEMPLO 4.—*Hallar el lugar geométrico de los vértices* C *de los triángulos esféricos* A B C, *que tienen fijos los vértices* A *y* B *y cuyos ángulos cumplen la condición:* $A + B - C = \varphi = \text{cte.}$ *conocida.*

Sea C un punto del lugar geométrico (fig. 155). Hallemos el circuncentro del triángulo ABC. Los tres arcos AP, BP y CP serán iguales; luego, los triángulos ABP, ACP y BCP son isósceles, y designaremos sus ángulos como se indica en la figura. Por hipótesis

$$A + B - C = (\beta + \gamma) + (\gamma + \alpha) - (\alpha + \beta) = 2\gamma = \varphi$$

Luego

$$\gamma = \frac{\varphi}{2} = \text{cte. conocida}$$

En el triángulo BAP se conocen el lado AB y los ángulos adyacentes. Luego, puede construirse, siendo el punto P conocido y fijo.

El lugar geométrico de C es la circunferencia menor ABC, de polo P y radio $PA = PB$.

EJEMPLO 5.—*¿Cuál es sobre la esfera de 1,2 dm. de radio, el área del triángulo esférico cuyos ángulos miden 54° 34', 75° 12' y 82° 45'?*

Aplicando la fórmula [1] y reduciendo los grados a minutos, se obtiene

$$S = \pi\, 1{,}2^2 \cdot \frac{(54 + 75 + 82 - 180)\,60 + 34 + 12 + 45}{180 \cdot 60} = 0{,}817 \text{ dm}^2$$

EJERCICIOS

1. ¿Cuál es, sobre la esfera cuya área es 4 cm^2., el área del triángulo esférico cuyos ángulos miden 64°, 108° y 125°?
2. Trazar por un punto dado A sobre la esfera un arco de círculo máximo perpendicular a un círculo máximo dado BC.
3. Trazar por un punto dado A sobre la esfera, un círculo máximo que forme un ángulo dado α con otro círculo máximo dado.
4. Construir un triángulo esférico, conociendo un lado y los dos ángulos adyacentes.
5. Construir un triángulo esférico rectángulo, conociendo un lado del ángulo recto y la hipotenusa.
6. Demostrar que en un cuadrilátero esférico $ABCD$ inscrito en un círculo menor, se verifica que las medidas de dos ángulos opuestos suman lo mismo que los otros dos.
7. Hallar el lugar geométrico del vértice C de los triángulos esféricos ABC que tienen fijo el lado AB y en los que la suma de los lados BC y AC vale siempre 180°.
8. Hallar el área del pentágono esférico cuyos ángulos miden 87° 16′, 108° 34′, 126° 23′, 150° y 156° 48′, en una esfera de 16 dm. de radio.
9. Demostrar que en todo cuadrilátero esférico circunscrito a una circunferencia menor las sumas de los pares de lados opuestos son iguales.
10. Hallar el valor del ángulo sólido de un cono de revolución de abertura: *a)* 90°; *b)* 60°; *c)* 120°.
11. Hallar el ángulo sólido de un cono de revolución, si la relación entre el diámetro de la base y la generatriz es 2/5.
12. Determinar los ángulos de un triángulo esférico equilátero cuya área es igual a la de medio círculo máximo.

29

TRIGONOMETRIA ESFERICA
TRIANGULOS RECTANGULOS Y RECTILATEROS

308. Teorema del coseno.

Sea el triángulo esférico $A\,B\,C$, perteneciente a una esfera de radio 1. Supondremos agudos A y b (fig. 156). Se proyecta C sobre el plano $A\,O\,B$ en D, y D sobre $O\,A$ en E. El triángulo determinado por C, E y D está en un plano perpendicular a $O\,A$, por contener dos perpendiculares a dicha recta: $C\,D$, perpendicular al plano $O\,A\,B$, y $D\,E$, por construcción. Por tanto, la recta $C\,E$ también es perpendicular a $O\,A$.

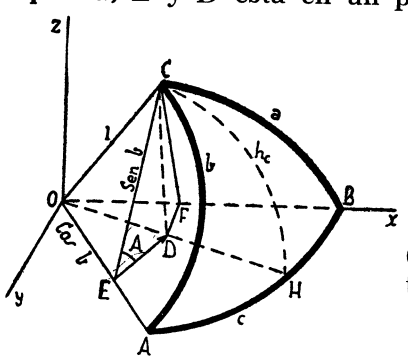


FIGURA 156

Se tiene, por tanto:

$$O\,E = \cos b; \qquad C\,E = \operatorname{sen} b$$

Como además el ángulo $C\,E\,D$ es el rectilíneo del diedro, es igual a A.

Luego

$$E\,D = \operatorname{sen} b \cos A; \quad C\,D = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} A$$

Vamos ahora a expresar que la proyección de la resultante $O\,C$ de la poligonal $O\,E\,D\,C$, sobre $O\,B$, es igual a la suma de las proyecciones de las componentes $O\,E$, $E\,D$ y $D\,C$, sobre la misma recta.

$$\text{Proy. } O\,C = \cos a; \quad \text{proy. } O\,E = \cos b \cos c; \quad \text{proy. } C\,D = 0$$

$$\text{proy. } E\,D = E\,D \cdot \cos (90 - c) = E\,D \operatorname{sen} c = \operatorname{sen} b \cos A \operatorname{sen} c$$

Por tanto:

$$\mathbf{\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A}$$

y análogamente

$$\mathbf{\cos b = \cos a \cos c + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos B}$$
$$\mathbf{\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C}$$

Fórmulas llamadas de BESSEL, que relacionan dos lados y el ángulo comprendido y servirán para calcular:

1) Los ángulos, conocidos los tres lados.
2) Un lado, conocidos los otros dos y el ángulo comprendido.

Como se puede observar, su papel es análogo al teorema del coseno en el plano.

309. Teorema de los senos.

Al arco de circunferencia máxima $C\,H = h_c$, trazado desde C, perpendicularmente a $A\,B$, se denomina *altura esférica* del triángulo sobre el lado $A\,B$. Será:

$$\operatorname{sen} h_c = C\,D = C\,E \operatorname{sen} A = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} A$$

Trazando desde D la perpendicular a $O\,B$ y uniendo el pie F de dicha perpendicular con C, se tiene análogamente

$$\operatorname{sen} h_c = C\,D = C\,F \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} B$$

Igualando las dos expresiones de sen h_c, queda

$$\operatorname{sen} b \operatorname{sen} A = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B$$

o sea

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B}$$

Trazando la altura esférica h_a, se obtiene del mismo modo

$$\frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}$$

quedando la fórmula:

$$\mathbf{\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}} \qquad [2]$$

Esta fórmula permite calcular un lado o un ángulo conociendo su ángulo opuesto, o lado opuesto, y otro par de elementos opuestos.

La dificultad estriba en calcular el tercer ángulo, pues aquí no hay relación constante entre los ángulos de un triángulo (como la había en el plano, en el que sumaban dos rectos).

Hay que buscar, entonces, otra fórmula que ligue elementos no opuestos.

310. Tercer grupo de fórmulas.

Se sustituye en la primera fórmula de Bessel, cos c por su valor deducido de la tercera, y sen c por sen a · sen C : sen A, deducido de [2]. Resulta

$$\cos a = \cos b\ (\cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C) +$$
$$+ \operatorname{sen} b \operatorname{sen} a \operatorname{sen} C \cot A$$
$$\cos a - \cos a \cos^2 b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos b \cos C +$$
$$+ \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} C \cot A$$

Pero

$$\cos a\ (1 - \cos^2 b) = \cos a \operatorname{sen}^2 b$$

Luego

$$\cos a \operatorname{sen}^2 b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos b \cos C + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} C \cot A$$

Dividiendo a los dos miembros por sen a sen b, resulta

$$\mathbf{cot\ a\ sen\ b = cos\ b\ cos\ C + sen\ C\ cot\ A}$$

y por permutación, [3]

$$\mathbf{cot\ a\ sen\ c = cos\ c\ cos\ B + sen\ B\ cot\ A}$$
$$\mathbf{cot\ b\ sen\ a = cos\ a\ cos\ C + sen\ C\ cot\ B}$$
$$\mathbf{cot\ b\ sen\ c = cos\ c\ cos\ A + sen\ A\ cot\ B}$$
$$\mathbf{cot\ c\ sen\ a = cos\ a\ cos\ B + sen\ B\ cot\ C}$$
$$\mathbf{cot\ c\ sen\ b = cos\ b\ cos\ A + sen\ A\ cot\ C}$$

[3]

311. Cuarto grupo de fórmulas.

Si se aplican las fórmulas de Bessel al triángulo polar, se tendrá:

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \operatorname{sen} b' \operatorname{sen} c' \cos A'$$

es decir

$$\cos (180 - A) = \cos (180_0 - B) \cos (180 - C) +$$
$$+ \operatorname{sen} (180^\circ - B) \operatorname{sen} (180^\circ - C) \cos (180^\circ - a)$$

Sustituyendo estos valores, se obtiene

$$-\cos A = \cos B \cos C - \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a$$

y en definitiva

$$\begin{aligned} \mathbf{\cos A} &= \mathbf{-\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a} \\ \mathbf{\cos B} &= \mathbf{-\cos A \cos C + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C \cos b} \\ \mathbf{\cos C} &= \mathbf{-\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos c} \end{aligned} \qquad [4]$$

que relacionan tres ángulos y un lado.

312. Triángulos rectángulos.

Si el ángulo recto es A, $\operatorname{sen} A = 1$, $\cos A = 0$, y los diversos grupos de fórmulas se reducen a las siguientes:

$$[1'] \quad \cos a = \cos b \cos c$$

$$[2'] \begin{cases} \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B \\ \operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} C \end{cases}$$

$$[3'] \begin{cases} \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C \\ \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B \\ \operatorname{tg} b = \operatorname{sen} c \operatorname{tg} B \\ \operatorname{tg} c = \operatorname{sen} b \operatorname{tg} C \end{cases}$$

$$[4'] \begin{cases} \cos a = \cot B \cot C \\ \cos B = \cos b \operatorname{sen} C \\ \cos C = \cos c \operatorname{sen} B \end{cases}$$

313. Regla mnemotécnica.

Para recordar estas fórmulas, es utilísimo conocer la siguiente regla, descubierta por Neper (fig. 157):

Puestos en el orden que indica la figura los elementos del triángulo, el coseno de cada uno de ellos es igual al producto:

a) De los *senos* de los *opuestos.*

b) De las *cotangentes* de los *adyacentes.*

(Recuérdese la consonancia de las palabras en cada frase.)

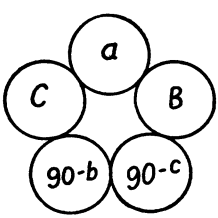


FIGURA 157

314. Resolución de triángulos rectángulos.

Son seis los casos de resolución de triángulos rectángulos:

PRIMER CASO.—*Datos:* catetos b y c.

Fórmulas: de la [1′], 3.ª de [3′] y 4ª de [3′], se tiene

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c \quad ; \quad \operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{sen} c} \quad ; \quad tg\ C = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{sen} b}$$

que dan siempre una solución real y determinada.

SEGUNDO CASO.—*Datos:* hipotenusa a, y cateto b.

Fórmulas: de la [1′], 1.ª de [2′] y 1.ª de [3′], sale

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b} \quad ; \quad \operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a} \quad ; \quad \cos C = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a}$$

Para que la solución sea real, ha de ser $|\cos a| \leqslant |\cos b|$, pues cos c ha de estar entre — 1 y 1. Cumplida esta condición, la solución es única, ya que de los dos valores suministrados por el sen B, hay que elegir solamente el valor de B que cumple la propiedad de que *a mayor lado se opone mayor ángulo.*

TERCER CASO.—*Datos:* cateto b, y su ángulo opuesto B.

Fórmulas: de la 1.ª de [2′], 3.ª de [3′] y 2.ª de [4′], se obtiene

$$\operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} \quad ; \quad \operatorname{sen} c = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} B} \quad ; \quad \operatorname{sen} C = \frac{\cos B}{\cos b}$$

Este es el *caso ambiguo*, pues si existe un triángulo solución T_1, el adyacente a él, T_2, también satisface al problema (fig. 158), pues tiene los elementos b y B' iguales a los datos. Los dos triángulos T_1 y T_2 son iguales, y por tanto las dos soluciones son equivalentes, si $C = A = 90^o$; pues entonces han de ser B y B' los polos del arco $A\,C$, y por tanto, $B\,C = B'\,C = B'\,A = B\,A$.

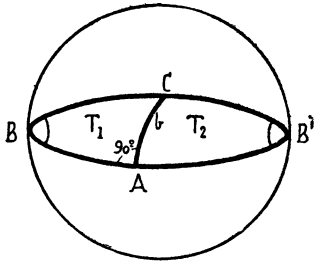


FIGURA 158

Puede suceder que alguno de los senos de las fórmulas a emplear salga mayor que 1. Entonces la solución no existe. El problema, por consiguiente, puede tener dos soluciones, una o ninguna.

CUARTO CASO.—*Datos:* cateto b y ángulo adyacente C.

Fórmulas: de la 1.ª y 4.ª de [3′] y de la 2.ª de [4′], sale

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} b}{\cos C} \quad ; \quad \operatorname{tg} c = \operatorname{sen} b \operatorname{tg} C \quad ; \quad \cos B = \cos b \cdot \operatorname{sen} C$$

Existe siempre una única solución real.

QUINTO CASO.—*Datos:* hipotenusa a y un ángulo B.

Fórmulas: de la 1.ª de [2'], 2.ª de [3'] y 1.ª de [4'], se deduce

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} B \quad ; \quad \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cdot \cos B \quad ; \quad \operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{ctg} B}{\cos a}$$

El problema es siempre posible, y tiene solución única.

SEXTO CASO.—*Datos:* ángulos B y C.

Fórmulas: de la 1.ª, 2.ª y 3.ª de [4'], se obtiene

$$\cos a = \operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{ctg} C \quad ; \quad \cos b = \frac{\cos B}{\operatorname{sen} C} \quad ; \quad \cos c = \frac{\cos C}{\operatorname{sen} B}$$

EJEMPLO.—*Resolver un triángulo esférico rectángulo, dada la hipotenusa* $a = 52° 27'$ *y un cateto* $b = 40° 15'$.

Las fórmulas que hay que aplicar son las que corresponden al segundo caso:

$$\log \cos c = \log \cos a + \operatorname{colog} \cos b$$
$$\log \operatorname{sen} B = \log \operatorname{sen} b + \operatorname{colog} \operatorname{sen} a$$
$$\log \cos C = \log \operatorname{tg} b + \operatorname{colog} \operatorname{tg} a$$

$$\begin{array}{rl} \log \cos a = & \bar{1},784941 \\ \operatorname{colog} \cos b = & 0,117304 \\ \hline \log \cos c = & \bar{1},902245 \end{array}$$

de donde se deduce que

$$\mathbf{c = 37° 2'}$$

$$\begin{array}{rl} \log \operatorname{sen} b = & \bar{1},810261 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} a = & 0,100750 \\ \hline \log \operatorname{sen} B = & \bar{1},911011 \end{array}$$

de donde

$$\mathbf{B = 54° 34'}$$

De los dos valores que podían tomarse para B, uno agudo y otro obtuso, se toma solamente el primero, pues siendo $a > b$, también ha de ser $A = 90° > B$. Por último

$$\begin{array}{rl} \log \operatorname{tg} b = & \bar{1},927565 \\ \operatorname{colog} \operatorname{tg} a = & \bar{1},885565 \\ \hline \log \cos C = & \bar{1},813130 \end{array}$$

luego

$$\mathbf{C = 49° 26'}$$

315. Triángulos rectiláteros.

Son los que tienen un lado recto. Si $a = 90°$, $\operatorname{sen} a = 1$, $\cos a = 0$, y los cuatro grupos de fórmulas se reducen a los siguientes:

$$[1''] \begin{cases} \cos A = -\cot b \cot c \\ \cos b = \cos B \operatorname{sen} c \\ \cos c = \cos C \operatorname{sen} b \end{cases} \qquad [3''] \begin{cases} \operatorname{tg} B = -\operatorname{tg} A \cos c \\ \operatorname{tg} C = -\operatorname{tg} A \cos b \\ \operatorname{tg} B = \operatorname{sen} C \operatorname{tg} b \\ \operatorname{tg} C = \operatorname{sen} B \operatorname{tg} c \end{cases}$$

$$[2''] \begin{cases} \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} b \\ \operatorname{sen} C = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} c \end{cases} \qquad [4'']: \quad \cos A = -\cos B \cos C$$

Estas fórmulas permiten resolver directamente los triángulos rectiláteros en los diversos casos posibles. Pero es preferible reducirlos a los casos ya estudiados de triángulos rectángulos, pues si un triángulo $A\,B\,C$ tiene $a = 90^{\circ}$, su triángulo polar $A'\,B'\,C'$ es rectángulo en A'. Resuelto éste según se explicó en el párrafo anterior, se determina el triángulo dado hallando los suplementos de los ángulos y lados de $A'\,B'\,C'$.

EJEMPLO.—*Resolver un triángulo esférico, sabiendo que* a = 90°, b = 68° 18′, c = 48° 36′.

En el triángulo polar $A'\,B'\,C'$ será: $A' = 90^{\circ}$, $B' = 111^{\circ}\ 42'$, $C' = 131^{\circ}\ 24'$. Aplicando las fórmulas del caso 6.° de triángulos rectángulos, tendremos

$$\begin{aligned} \log \cos a' &= \log \operatorname{ctg} B' + \log \operatorname{ctg} C' \\ \log \cos b' &= \log \cos B' + \operatorname{colog} \operatorname{sen} C' \\ \log \cos c' &= \log \cos C' + \operatorname{colog} \operatorname{sen} B' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log |\operatorname{ctg} B'| &= \bar{1},599827 \\ \log |\operatorname{ctg} C'| &= \bar{1},945281 \\ \hline \log \cos a' &= \bar{1},545108 \end{aligned}$$

De donde

$$a' = 69^{\circ}\ 27'$$

$$\begin{aligned} \log |\cos B'| &= \bar{1},567904 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} C' &= 0,124874 \\ \hline \log |\cos b'| &= \bar{1},692778 \end{aligned}$$

De donde

$$b' = 180 - 60^{\circ}\ 28' = 119^{\circ}\ 32'$$

ya que $B' > A'$, ha de ser igualmente $b' > a'$.

$$\begin{aligned} \log |\cos C'| &= \bar{1},820406 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} B' &= 0,031922 \\ \hline \log |\cos c'| &= \bar{1},852328 \end{aligned}$$

De donde

$$c' = 180 - 44^\circ\ 37' = 135^\circ\ 23'$$

pues siendo $C' > A'$, también $c' > a'$.

Los ángulos del triángulo $A\,B\,C$ valen, por tanto

$$A = 180^\circ - 69^\circ\ 27' = \mathbf{110^\circ\ 33'}$$

$$B = 180^\circ - 119^\circ\ 32' = \mathbf{60^\circ\ 28'}$$

$$C = 180^\circ - 135^\circ\ 23' = \mathbf{44^\circ\ 37'}$$

316. Aplicaciones.

EJEMPLO 1.—*En un triángulo esférico isósceles los lados miden 60°, 60° y 90°. Hallar sus ángulos.*

Un triángulo isósceles se resuelve trazando la altura esférica c sobre el lado desigual (figura 159), con lo que el triángulo se descompone en dos triángulos rectángulos iguales. En uno de ellos se tiene: $a = 60°$, $b = 45°$. Basta aplicar las fórmulas del *segundo caso:*

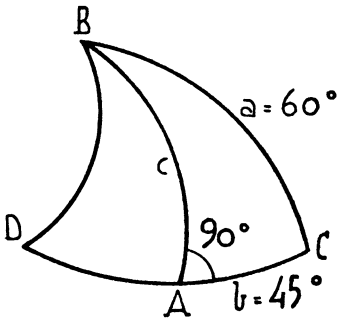


FIGURA 159

$$\cos c = \frac{\cos 60^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{1/2}{\sqrt{2}/2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \quad C = 45^\circ$$

$$\operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sen} 45^\circ}{\operatorname{sen} 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \quad B = 54^\circ\ 43'$$

y ya que el triángulo $A\,B\,C$ es también isósceles, será $C = B = 54°\ 43'$. Los ángulos pedidos valen:

$$\mathbf{C = 54^\circ\ 43'} \quad ; \quad \mathbf{D = 54^\circ\ 43'} \quad ; \quad \mathbf{B = 109^\circ\ 26'}$$

EJEMPLO 2.— *Hallar los lados de un triángulo equilátero cuyos ángulos miden 90°.*

Trazando una altura esférica, se obtienen dos triángulos rectángulos, siendo $A = 90°$, $C = 90°$, $B = 45°$. Aplicando las fórmulas del *caso sexto:*

$$\cos a = \operatorname{ctg} 45\ \operatorname{ctg} 90^\circ = 1 \cdot 0 = 0 \quad ; \quad \mathbf{a = 90^\circ}$$

EJERCICIOS

1. Hallar los lados de un triángulo equilátero esférico cuyos ángulos miden 75°.
2. Resolver un triángulo rectángulo, conociendo: 1.°, $b = 42^\circ\ 10'$, $c = 65^\circ\ 42'$; 2.°, $c = 35^\circ\ 47'\ 22''$, $C = 53^\circ\ 26'\ 34''$.
3. Resolver un triángulo isósceles cuyos lados miden $52^\circ\ 27'\ 46''$, $52^\circ\ 27'\ 46''$ y $80^\circ\ 29'\ 16''$.
4. Hallar los ángulos de un triángulo esférico cuyos lados miden: $a = 90^\circ$, $b = 66^\circ\ 33'$, $c = 49^\circ\ 36'$.

5. Determinar una fórmula simplificada que relacione el lado y el ángulo de un triángulo esférico equilátero, partiendo del primer grupo de Bessel.

6. Un barco sale de Nueva York ($\varphi = 40^\circ\ 42'$ N, $\lambda = 74^\circ\ 1'$ W) siguiendo un círculo máximo que forma un ángulo de $30^\circ\ 10'$ con el meridiano de Nueva York. Determina la posición del punto M de dicho círculo máximo que está a igual distancia del polo P que de Nueva York.

7. Un trasatlántico sale de San Francisco siguiendo un círculo máximo que forma un ángulo de $139^\circ\ 30'$ con el meridiano de dicha ciudad. Sitúa la posición del punto M en que cruza el trasatlántico al Ecuador, y halla la longitud que ha recorrido hasta dicho instante. Coordenadas de San Francisco ($\varphi = 37^\circ\ 48'\ 30''$ N; $\lambda = 122^\circ\ 24'$ W).

8. Resuelve el triángulo rectángulo $A\,B\,C$, en el que $c = 46^\circ\ 12'\ 18''$, $a = 75^\circ\ 48'\ 36''$.

9. Resuelve el triángulo rectángulo $A\,B\,C$ sabiendo que $c = 109^\circ\ 15'\ 48''$, $B = 38^\circ\ 45'\ 24''$.

10. Resuelve el triángulo isósceles en el que $b = c = 54^\circ\ 28'\ 24''$ y $\hat{A} = 112^\circ\ 36'\ 12''$.

11. Un avión recorre el trayecto entre Chicago ($\varphi = 41^\circ\ 51'$ N, $\lambda = 87^\circ\ 31'\ 42''$ W) y un punto B del Ecuador de $170^\circ\ 15'$ E. Halla la distancia recorrida y el ángulo que el círculo máximo que ha seguido forma con los meridianos inicial y final.

12. Desde dos puntos del Ecuador cuyas longitudes difieren en 90°, parten simultáneamente hacia el polo Norte, y siguiendo sus meridianos, dos móviles, A y B, con velocidades de $666\frac{2}{3}$ Km./h. y 1.000 Km./h., respectivamente. Calcula:

    1.º La distancia que separa a estos móviles al cabo de cinco horas, medida sobre el arco de círculo máximo que los une.

    2.º Los ángulos que este círculo máximo forma con los meridianos de A y de B.

    3.º Area del huso de ángulo A.

13. Desde un punto M de la tierra, cuya longitud es 0° y la latitud 45° N, parte un avión hacia otro punto, P, que está equidistante de los dos polos de la Tierra y del punto M; pero se ve obligado a aterrizar a los 2/3 de su camino y al Este de M. Halla:

    1.º Las coordenadas geográficas del punto de aterrizaje.

    2.º El tiempo que tardó en efectuar éste, si llevó una velocidad de 800 Km./h.

14. De un triángulo esférico trazado en una superficie de radio 8 dm. se conocen:

$$b = 146^\circ\ 11'\ 24'' \qquad C = 126^\circ\ 13'14'' \qquad A = 90^\circ$$

Se pide:

a) Resolver el triángulo.

b) Hallar su área en m.^{2}.

c) Volumen de la pirámide esférica con vértice en el centro de la esfera y base la del triángulo.

15. En una esfera de radio $R = 2$ dm. se consideran los puntos medios A, B y C de los lados de un triángulo esférico trirrectángulo formado por dos cuadrantes de meridiano y un cuadrante de ecuador. Calcula sin tablas:

a) Las medidas en radianes de los lados del triángulo esférico $A\,B\,C$.

b) Los cosenos de los ángulos de dicho triángulo.

c) El área del triángulo rectilíneo plano $A'\,B'\,C$, siendo A' y B' las proyecciones ortogonales de A y B sobre el plano del ecuador que pasa por C.

16. De un triángulo esférico trazado en una esfera de 6 decímetros de radio se conocen:

$$b = 140^{\circ}\,52'\,40'' \qquad c = 114^{\circ}\,15'\,54'' \qquad A = 90^{\circ}$$

Se pide:

a) Resolver el triángulo.

b) Hallar su superficie en m.^{2}.

c) Volumen de la pirámide esférica cuyo vértice es el centro de la esfera y base el triángulo.

17. De un triángulo esférico trazado en una superficie esférica de radio 9 dm. se conocen:

$$a = 75^{\circ}\,20'\,00'' \qquad c = 54^{\circ}\,28'\,32'' \qquad A = 90^{\circ}$$

Se pide:

1.º Resolver el triángulo.

2.º Hallar su superficie en m.^{2}.

3.º Volumen de la pirámide esférica con vértice en el de la esfera y base el triángulo.

30

RESOLUCION DE TRIANGULOS OBLICUANGULOS
COORDENADAS GEOGRAFICAS

317. Preparación de fórmulas para el cálculo logarítmico.

Despejando cos A en el primer grupo de Bessel, se tiene

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$$

Esta expresión no es apta para la aplicación del cálculo logarítmico y se transforma de modo análogo a lo que se hace en el plano para obtener las *fórmulas de Briggs:*

$$1 - \cos A = \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c + \cos b \cos c - \cos a}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} =$$

$$= \frac{\cos (b - c) - \cos a}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} = \frac{\cos a - \cos (b - c)}{-\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} =$$

$$= \frac{-2 \operatorname{sen} \frac{a + b - c}{2} \operatorname{sen} \frac{a - b + c}{2}}{-\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} =$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen} (p - c) \operatorname{sen} (p - b)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$$

$$1 + \cos A = \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c - \cos b \cos c + \cos a}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} =$$

$$= \frac{\cos a - \cos (b + c)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} = \frac{\cos (b + c) - \cos a}{-\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} =$$

NOTA.—Los párrafos 317 a 320 de esta Lección no son exigidos por los actuales Cuestionarios, y pueden suprimirse.

$$= \frac{-2\,\text{sen}\,\dfrac{b+c+a}{2}\cdot\text{sen}\,\dfrac{b+c-a}{2}}{-\,\text{sen}\,b\cdot\text{sen}\,c} =$$

$$= \frac{2\,\text{sen}\,p\cdot\text{sen}\,(p-a)}{\text{sen}\,b\,\text{sen}\,c}$$

Sabiendo que $1 - \cos A = 2\,\text{sen}^2\,\dfrac{A}{2}$ y que $1 + \cos A = 2\cos^2\dfrac{A}{2}$,

$$\text{sen}\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\text{sen}\,(p-b)\,\text{sen}\,(p-c)}{\text{sen}\,b\,\text{sen}\,c}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\text{sen}\,p\,\text{sen}\,(p-a)}{\text{sen}\,b\,\text{sen}\,c}}$$

$$\textbf{tg}\,\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{2}} = \sqrt{\frac{\textbf{sen}\,(\mathbf{p}-\mathbf{b})\,\textbf{sen}\,(\mathbf{p}-\mathbf{c})}{\textbf{sen}\,\mathbf{p}\,\textbf{sen}\,(\mathbf{p}-\mathbf{a})}} \qquad [1]$$

y análogamente,

$$\text{sen}\,\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\text{sen}\,(p-a)\,\text{sen}\,(p-c)}{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,c}}$$

$$\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\text{sen}\,p\,\text{sen}\,(p-b)}{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,c}}$$

$$\textbf{tg}\,\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{2}} = \sqrt{\frac{\textbf{sen}\,(\mathbf{p}-\mathbf{a})\,\textbf{sen}\,(\mathbf{p}-\mathbf{c})}{\textbf{sen}\,\mathbf{p}\,\textbf{sen}\,(\mathbf{p}-\mathbf{b})}} \qquad [2]$$

$$\text{sen}\,\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\text{sen}\,(p-a)\,\text{sen}\,(p-b)}{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b}}$$

$$\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\text{sen}\,p\,\text{sen}\,(p-c)}{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b}}$$

$$\mathbf{tg}\ \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{2}} = \sqrt{\frac{\mathbf{sen\ (p - a)\ sen\ (p - b)}}{\mathbf{sen\ p\ sen\ (p - c)}}} \qquad [3]$$

318. Analogías de Gauss-Delambre.

Se sabe que

$$\cos\frac{A+B}{2} = \cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}$$

sustituyendo en esta expresión los resultados anteriores, resultará:

$$\cos\frac{A+B}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c}} \cdot \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \cdot \operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} c}} -$$

$$- \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c}} \cdot \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} c}} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} p}{\operatorname{sen} c} \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b}} -$$

$$- \frac{\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} c} \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a) \cdot \operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b}}$$

o sea

$$\cos\frac{A+B}{2} =$$

$$= \left(\frac{\operatorname{sen} p}{\operatorname{sen} c} - \frac{\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} c}\right) \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} c} \operatorname{sen}\frac{C}{2} =$$

$$= \frac{2\operatorname{sen}\frac{p-p+c}{2}\cos\frac{p+p-c}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}} \operatorname{sen}\frac{C}{2} =$$

$$= \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \operatorname{sen} \frac{C}{2}$$

Análogamente se obtienen:

$$\operatorname{sen} \frac{A+B}{2}, \quad \cos \frac{A-B}{2}, \quad \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

Expresadas en forma de proporción:

$$\frac{\cos \frac{A+B}{2}}{\operatorname{sen} \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}; \quad \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen} \frac{C}{2}} = \frac{\operatorname{sen} \frac{a+b}{2}}{\operatorname{sen} \frac{c}{2}}$$

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}; \quad \frac{\operatorname{sen} \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = \frac{\operatorname{sen} \frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen} \frac{c}{2}}$$

Se llaman analogías de Gauss y Delambre, porque ambos las descubrieron independientemente.

319. Analogías de Neper.

Si se dividen por columnas las analogías de Gauss, se tiene:

$$\operatorname{tg} \frac{A+B}{2} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} \cot \frac{C}{2}; \quad \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen} \frac{a+b}{2}} \cot \frac{C}{2}$$

y dividiendo por filas,

$$\operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2}} \operatorname{tg} \frac{c}{2}; \quad \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen} \frac{A+B}{2}} \operatorname{tg} \frac{c}{2}$$

320. Resolución de triángulos oblicuángulos.

Hay seis casos, según se conozcan:

1) Los tres lados.
2) Dos lados y el ángulo comprendido.
3) Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
4) Los tres ángulos.
5) Dos ángulos y el lado común.
6) Dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos.

Estos tres últimos casos se reducen a los tres primeros resolviendo el triángulo polar, por lo cual solamente detallaremos los tres primeros casos.

PRIMER CASO.—*Datos:* lados a, b y c.

Fórmulas: las [1], [2] y [3] análogas a las de Briggs.

EJEMPLO.—*Dados los lados de un triángulo* a = 65° 24′ 32″, b = 75° 23′ 8″ y c = 56° 15′ 24″, *hallar los tres ángulos.*

Se tiene

$$\log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{1}{2} [\log \operatorname{sen} (p - b) + \log \operatorname{sen} (p - c) + \operatorname{colg} \operatorname{sen} p + \operatorname{colog} \operatorname{sen} (p - a)]$$

y otras dos análogas. Además

$$a + b + c = 2p = 197° 13′ 4″ \quad ; \quad p = 98° 31′ 32″$$

$$p - a = 33° 7′ \quad ; \quad p - b = 23° 8′ 24″ \quad ; \quad p - c = 42° 16′ 8″$$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{sen} (p - b) &= \overline{1},594372 \\ \log \operatorname{sen} (p - c) &= \overline{1},827763 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} p &= 0,004826 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} (p - a) &= 0,262531 \\ \hline & \overline{1},689492 \end{aligned}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \overline{1},844746 \quad ; \quad \frac{A}{2} = 34° 58′ 13″$$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{sen} (p - c) &= \overline{1},827763 \\ \log \operatorname{sen} (p - a) &= \overline{1},737468 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} p &= 0,004826 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} (p - b) &= 0,405628 \\ \hline & \overline{1},975685 \end{aligned}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \overline{1},987842 \quad ; \quad \frac{B}{2} = 46° 11′ 53″$$

$$\begin{aligned}
\log \operatorname{sen}(p-a) &= \bar{1},737468\\
\log \operatorname{sen}(p-b) &= \bar{1},594372\\
\operatorname{colog}\operatorname{sen} p &= 0,004826\\
\operatorname{colog}\operatorname{sen}(p-c) &= 0,172237\\
&\overline{\bar{1},508903}
\end{aligned}$$

$$\log \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \bar{1},754451 \quad ; \quad \frac{C}{2} = 29^{\circ}\,36'\,8''$$

Los ángulos son:

$$A = 69^{\circ}\,56'\,26'' \quad ; \quad B = 88^{\circ}\,23'\,46'' \quad ; \quad C = 59^{\circ}\,12'\,16''$$

SEGUNDO CASO.—*Datos:* lados a y b, ángulo C.

Fórmulas: Aplicando el primer grupo de fórmulas de Bessel se halla el tercer lado

$$\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C$$

Después el teorema de los senos permite calcular los dos ángulos desconocidos. Pero la fórmula anterior tiene el inconveniente de no ser calculable por logaritmos. Por esto es preferible aplicar las *dos primeras analogías de Neper,* que nos dan $\dfrac{A+B}{2}$ y $\dfrac{A-B}{2}$, con lo que se tendrá A y B por suma y resta. El teorema de los senos, o mejor la 3.ª analogía de Neper, permite luego hallar el lado c.

EJEMPLO.—*Resolver un triángulo esférico del que se conocen*

$$a = 55^{\circ}\,44'\,33'' \quad , \quad b = 66^{\circ}\,55'\,44'' \quad \text{y} \quad C = 33^{\circ}\,22'\,11''$$

Se tiene

$$b + a = 122^{\circ}\,40'\,17'' \quad ; \quad \frac{b+a}{2} = 61^{\circ}\,20'\,8''$$

$$b - a = 11^{\circ}\,11'\,11'' \quad ; \quad \frac{b-a}{2} = 5^{\circ}\,35'\,35''$$

$$\log \operatorname{tg}\frac{B+A}{2} = \log \operatorname{ctg}\frac{C}{2} + \log \cos\frac{b-a}{2} + \operatorname{colog}\cos\frac{b+a}{2}$$

$$\begin{aligned}
\log \operatorname{ctg} C/2 &= 0,523275\\
\log \cos (b-a)/2 &= \bar{1},997927\\
\operatorname{colog}\cos (b+a)/2 &= 0,319051\\
\log \operatorname{tg}(A+B)/2 &= 0,840252
\end{aligned} \quad ; \quad \frac{A+B}{2} = 81^{\circ}\,46'\,47''$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{B-A}{2} = \log \operatorname{ctg} \frac{C}{2} + \log \operatorname{sen} \frac{b-a}{2} + \operatorname{colog} \operatorname{sen} \frac{b+a}{2}$$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{ctg} C/2 &= 0{,}523275 \\ \log \operatorname{sen} (b-a)/2 &= \bar{2}{,}988890 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} (b+a)/2 &= 0{,}056780 \\ \hline \log \operatorname{tg} (B-A)/2 &= \bar{1}{,}568945 \end{aligned} \quad ; \quad \frac{A-B}{2} = 20^\circ\, 20'\, 11''$$

Sumando y restando los valores obtenidos de $(B + A)/2$ y $(B - A)/2$, sale

$$B = 102^\circ\, 8'\, 58'' \quad , \quad A = 61^\circ\, 26'\, 36''$$

Por último

$$\log \operatorname{tg} \frac{b+a}{2} = \log \operatorname{tg} \frac{c}{2} + \log \cos \frac{B-A}{2} - \log \cos \frac{B+A}{2}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{c}{2} = \log \operatorname{tg} \frac{b+a}{2} + \log \cos \frac{B+A}{2} + \operatorname{colg} \cos \frac{B-A}{2}$$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} (b+a)/2 &= 0{,}262271 \\ \log \cos (B+A)/2 &= \bar{1}{,}155262 \\ \log \cos (B-A)/2 &= 0{,}027951 \\ \hline \log \operatorname{tg} c/2 &= \bar{1}{,}445484 \end{aligned} \quad ; \quad \frac{c}{2} = 15^\circ\, 35'\, 6''$$

$$c = 31^\circ\, 10'\, 12''$$

TERCER CASO.—*Datos:* lados a y b y ángulo A.
Fórmulas: por el teorema de los senos se halla B:

$$\operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a}$$

Luego por las primeras analogías de Neper se halla $\frac{C}{2}$, y por las segundas, $\frac{c}{2}$.

Este es un *caso ambiguo*. Construído el ángulo A dado, y tomando $A\,C = b$, trazaremos la altura esférica h_c desde C sobre el lado opuesto (fig. 160). Aplicando el teorema de los senos al triángulo $A\,C\,D$, se tiene

$$\text{sen } h_c = \text{sen } b \cdot \text{sen } A$$

Para que exista solución es evidente que ha de ser $a \geqslant h_c$, o sea sen $a \geqslant$ sen h_c, y por tanto

$$\text{sen } a \geqslant \text{sen } b \cdot \text{sen } A$$

Si se cumple que sen $a =$ sen $b \cdot$ sen A, hay *una sola solución*: el triángulo $A\,C\,D$. Si se cumple sen $a >$ sen $b \cdot$ sen A, habrá *dos soluciones*: los triángulos ACB_1 y $A\,C\,B_2$. Estas consideraciones y la condición de que a mayor lado se opone mayor ángulo permiten distinguir fácilmente el número de soluciones.

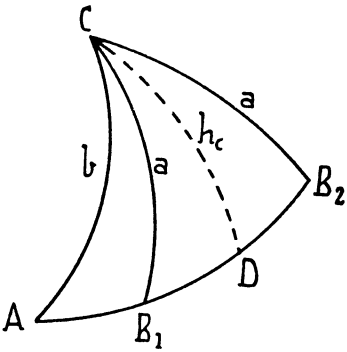


FIGURA 160

321. Aplicación de la Trigonometría esférica a la esfera terrestre. Coordenadas geográficas.

La Tierra es muy aproximadamente una esfera algo achatada por los *Polos Norte y Sur*, que son los extremos de un eje, alrededor del cual gira la Tierra en su movimiento de rotación. La circunferencia máxima perpendicular al eje de la Tierra es el *Ecuador*, y las circunferencias máximas que pasan por los dos polos son los *meridianos;* las circunferencias menores paralelas al Ecuador son los *paralelos* (fig. 161).

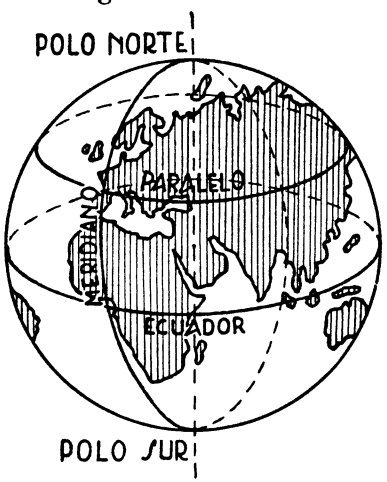


FIGURA 161

Así, pues, la Tierra puede asimilarse con mucha aproximación a una esfera cuya circunferencia máxima tiene 40.000 km., y por tanto cuyo radio es de unos 6.366 km.

Para localizar la posición de un punto (ciudad, montaña, etc.) sobre la esfera terrestre, se escoge un meridiano origen, que es el que pasa por el Observatorio Astronómico de Greenwich, en Inglaterra, y que casi coincide con el de Barcelona. El semimeridiano de Greenwich corta al Ecuador en G (fig. 162). Sea M un punto de la Tierra;

el semimeridiano $N\,M\,S$ corta al Ecuador en H. La graduación del arco $G\,H$ se denomina *longitud* del punto M. Se determina su po-

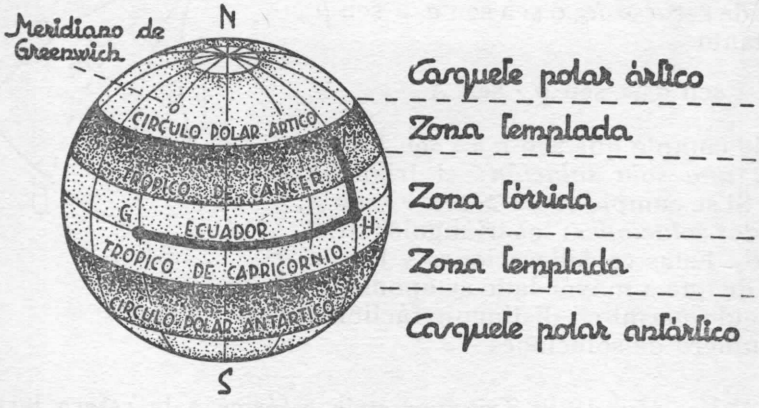


FIGURA 162

sición con relación al meridiano origen, indicando si está al Este o al Oeste del mismo.

La graduación del arco $H\,M$ mide la *latitud* de M. Se precisa su posición indicando si está al norte o al sur del Ecuador.

La longitud y la latitud de un lugar son sus *coordenadas geográficas.*

322. Distancia esférica entre dos puntos de la Tierra.

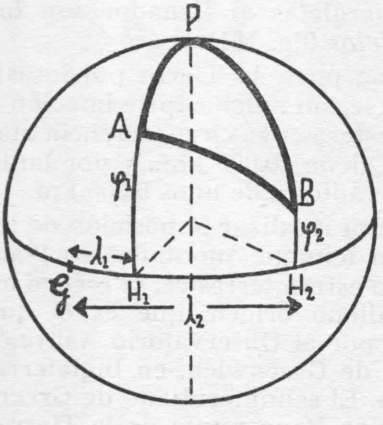


FIGURA 163

Con frecuencia se presenta el problema de hallar la mínima distancia geográfica o esférica entre dos puntos A y B de la superficie terrestre, dados por sus coordenadas geográficas. Dicha mínima distancia es la que viene dada por el menor arco de circunferencia máxima que pasa por A y B (fig. 163), según se vio en el número 304, 3.ª. Trazando los meridianos $P\,A$ y $P\,B$, que pasan por A y B tendremos: $A\,H_1 = \varphi_1$, latitud de A, $G\,H_1 = \lambda_1$, su longitud, $B\,H_2 = \varphi_2$, latitud de B, y $G\,H_2 = \lambda_2$, su longitud.

Por consiguiente, en el triángulo PAB se conocen: $PA = 90 - \varphi_1$, $PB = 90 - \varphi_2$, $\widehat{APB} = H_1H_2 = \lambda_2 - \lambda_1$. Para hallar el arco AB, basta, pues, resolver dicho triángulo por las fórmulas y métodos indicados para el segundo caso. Pero como solamente interesa hallar el lado $p = AB$, puede también aplicarse el siguiente:

Partiendo del primer grupo de fórmulas de Bessel, se tiene

$$\cos p = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos P$$

o sea

$$\cos p = \cos b \,(\cos a + \operatorname{sen} a \operatorname{tg} b \cos P)$$

que se hace calculable por logaritmos por medio de un ángulo auxiliar, poniendo

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} b \cos P \qquad [4]$$

En efecto

$$\cos p = \cos b \,(\cos a + \operatorname{sen} a \operatorname{tg} \alpha) =$$

$$= \cos b \,\frac{\cos a \cdot \cos \alpha + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \qquad [5]$$

$$\cos p = \cos b \,\frac{\cos (a - \alpha)}{\cos \alpha}$$

EJEMPLO 1.—*Calcular la distancia geográfica entre dos puntos* A *y* B *que tienen por coordenadas geográficas:* A ($\varphi_1 = 55^\circ\ 45'\ 13''$ N, $\lambda_1 = 55^\circ\ 48'\ 10''$ E); B ($\varphi_2 = 48^\circ\ 50'\ 2''$ N, $\lambda_2 = 20^\circ\ 30'\ 40''$ E).

Se tiene:

$$a = PB = 90^\circ - 48^\circ\ 50'\ 2'' = 41^\circ\ 9'\ 58''$$
$$b = PA = 90^\circ - 55^\circ\ 45'\ 13'' = 34^\circ\ 14'\ 47''$$
$$P = 55^\circ\ 48'\ 10'' - 20^\circ\ 30'\ 40'' = 35^\circ\ 17'\ 30''$$

Según [4] es

$$\log \operatorname{tg} \alpha = \log \operatorname{tg} b + \log \cos P$$
$$\log \operatorname{tg} b = \bar{1},833009$$
$$\log \cos P = \bar{1},911808$$
$$\log \operatorname{tg} \alpha = \bar{1},744817 \quad ; \quad \alpha = 29^\circ\ 31'\ 35''$$

y por tanto

$$a - \alpha = 12^\circ\ 6'\ 13''$$

Según la fórmula [5]:

$$\log \cos p = \log \cos b + \log \cos (a - \alpha) + \operatorname{colog} \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} \log \cos (a - \alpha) &= \bar{1},990236 \\ \log \cos b &= \bar{1},917310 \\ + \operatorname{colog} \cos \alpha &= 0,058431 \end{aligned}$$

$$\log \cos p = \bar{1},965977 \; ; \; p = 22^{\circ}\, 23'\, 3'' = 80583''$$

Cálculo de $p = AB$, en kilómetros

$$p = \frac{10000 \,.\, 80583}{90 \,.\, 60 \,.\, 60} = \frac{10 \,.\, 80583}{324} = \mathbf{2487\ Km.}$$

EJEMPLO 2.—*Hallar la distancia geográfica entre Madrid y Buenos Aires.* Para Madrid: $\lambda_1 = 3^{\circ}\ 41'$ Oeste, $\varphi_1 = 40^{\circ}\ 24'$ Norte. Para Buenos Aires: $\lambda_2 = 58^{\circ}\ 22'$ Oeste, $\varphi_2 = 34^{\circ}\ 36'$ Sur.

El triángulo esférico Madrid-Buenos Aires-Polo Norte tiene de lados: $a = 90^{\circ} + 34^{\circ}\ 36' = 124^{\circ}\ 36'$, $b = 90^{\circ} - 40^{\circ}\ 24' = 49^{\circ}\ 36'$, y el ángulo $P = 58^{\circ}\ 22' - 3^{\circ}\ 41' = 54^{\circ}\ 41'$. El cálculo de $p = AB$ da aproximadamente

89° 45′ que corresponde a 9970 Km.

EJERCICIOS

1. Las coordenadas geográficas de un punto A de la superficie terrestre son:
   Latitud: 30° N. Longitud: 20° E.
   Análogamente las de otro punto B son:
   Latitud: 30° N. Longitud: 153° E.
   Suponiendo la Tierra esférica, halla:
   1.° La distancia mínima entre los puntos A y B.
   2.° La diferencia entre las horas solares en los puntos A y B.
   3.° Dibuja una proyección de la esfera terrestre donde puede interpretarse el problema.
2. Dos puntos situados en el mismo paralelo de latitud 60° N se encuentran sobre el mismo meridiano (diferencia de longitud, 180°). Determinar: 1.° Su distancia siguiendo el paralelo. 2.° Siguiendo el meridiano (radio de la Tierra = 6.370 km).
3. Calcula la distancia siguiendo el paralelo entre dos ciudades situadas en el paralelo de latitud 60°, sabiendo que sus longitudes son: 10° E y 30° E. Radio terrestre = $20.000/\pi$ km.
4. Utilizando la definición histórica del metro, calcular la longitud del menor arco de paralelo comprendido entre un punto de la superficie terrestre a los 60° de latitud Norte y 125° 30′ de longitud Oeste, y otro a los 60° de latitud Norte y 75° de longitud Este.
5. Resuelve el triángulo oblicuángulo ABC, dados $b = 81^{\circ}\ 42'\ 18''$, $c = 52^{\circ}\ 19'\ 48''$, $C = 47^{\circ}\ 25'\ 6''$.
6. Resuelve el triángulo oblicuángulo ABC, conociendo $A = 35^{\circ}\ 52'\ 30''$, $B = 56^{\circ}\ 10'\ 42''$, $a = 40^{\circ}\ 38'\ 36''$.

7. Resuelve el triángulo esférico obliguángulo $A\,B\,C$, conocidos $a = 121^\circ\ 15'\ 24''$, $b = 104^\circ\ 54'\ 42''$, $c = 65^\circ\ 42'\ 30''$, descomponiéndolo en dos triángulos rectángulos mediante la altura sobre el lado c.

8. Un navío recorre un paralelo de latitud 50° N hasta que la variación de su longitud es 2° 15'. ¿Qué distancia ha recorrido?

9. Un navío navega siguiendo un círculo máximo desde A ($\varphi_1 = 53^\circ\ 53'$ N, $\lambda_1 = 166^\circ\ 35'$ W) hasta B ($\varphi_2 = 87^\circ\ 50'$ S, $\lambda_2 = 144^\circ\ 59'$ E). 1.° Encuentra la distancia recorrida, y los ángulos que forma la ruta con los meridianos inicial y final. 2.° Sitúa el punto de intersección de la trayectoria con el Ecuador. 3.° Determina el punto de la trayectoria cuya longitud es 180°.

10. Un barco sale de Nueva York ($\varphi = 40^\circ\ 48'\ 36''$ N, $\lambda = 73^\circ\ 57'\ 30''$ W) siguiendo un círculo máximo que forma un ángulo de 36° con el meridiano de Nueva York. 1.° Halla la longitud y latitud de su posición B cuando ha recorrido 500 millas. 2.° Determina el punto de la trayectoria más próxima al Polo Norte.

11. Un barco navega hacia el Oeste un trayecto de 800 millas, siguiendo un paralelo de 35° N de latitud. ¿Cuál es la variación de su longitud?

12. Un barco navega desde Honolulú ($\varphi_1 = 21^\circ\ 18'\ 18''$ N, $\lambda_1 = 157^\circ\ 52'\ 18''$ W) hasta San Francisco ($\varphi_2 = 37^\circ\ 48'\ 30''$ N, $\lambda_2 = 122^\circ\ 24'\ 42''$ W), siguiendo un arco de circunferencia máxima. Hallar los ángulos que forma esta trayectoria con los meridianos de dichas ciudades, y la distancia entre ambas.

13. Un avión vuela de un punto A ($\varphi_1 = 12^\circ\ 47'$ N, $\lambda_1 = 24^\circ\ 16'$ E) a otro B ($\varphi_2 = 28^\circ\ 12'$ S, $\lambda_2 = 83^\circ\ 43'$ E), siguiendo un arco de círculo máximo. Halla la distancia recorrida, y los ángulos de salida y de llegada.

14. Dos puntos del paralelo 30° N tienen longitudes respectivas: 23° 42' E y 18° 26' O. Se desea calcular:
    a) La distancia esférica entre ambas.
    b) Su distancia en el espacio.
    c) La distancia polar de cada uno.
    d) La diferencia de hora local.

15. Dos puntos, A y B, sobre la superficie de la Tierra considerada esférica, tienen igual latitud, 45°. La longitud de A es 25° 18' Oeste y la de B, 34° 42' Este (ambas con relación a un mismo meridiano). Se pide:
    a) Longitud en kilómetros del arco de paralelo que los une.
    b) Longitud del arco de circunferencia máxima que los une.

    La circunferencia máxima de la Tierra tiene de longitud 40.000 kilómetros, aproximadamente.

16. Un avión que sale de Madrid a las 0 horas (locales) de un día, tarda 18 horas 30 minutos en llegar a un punto B, cuya longitud referida al meridiano de Madrid es 75° Oeste.

    ¿A qué hora (local de B) llega el avión a dicho punto B?

17. Compara la distancia geográfica mínima y la distancia siguiendo un paralelo, entre dos puntos de igual latitud, como, por ejemplo, P_1 (Nueva York) de longitud 76° 21' (Oeste) y latitud 40° 45' y P_2 (Nápoles) de longitud 14° 13' (Este) e igual latitud.

18. Con los datos del ejemplo 2.º, calcula el lugar en que cruzaría el Ecuador un avión en vuelo directo de Madrid a Buenos Aires siguiendo el arco de círculo máximo.

19. Las coordenadas geográficas de Murcia son: Longitud, 2º 33′ 33″ E.; latitud, 37º 59′ 3″ N., y las de Granada, 5′ 15″ E. y 37º 10′ 37″ N., respectivamente. Calcula, en kilómetros, la distancia entre esas dos capitales, medida según la cuerda del arco de círculo máximo que las une, suponiendo el radio terrestre de 6.366 kilómetros.

20. Las coordenadas geográficas de Barcelona son: 45′ 49″ E. de longitud y 43° 15′ 26″ Norte de latitud, y las de Sevilla: 2° 18′ 18″ O. de longitud y 37º 28′ 10″ N. de latitud. Calcula la distancia a que se encuentran.

21. Un navío salió de A y llegó a B recorriendo un arco de círculo máximo. Las coordenadas de A son: longitud, 89° 40′ E,; latitud, 52° N., y las de B, 64° 32′ E. y 48° 52′ N., respectivamente. Calcular la distancia recorrida por el navío y el ángulo que ha formado con el meridiano la dirección del navío a su salida.

22. En una esfera de 124 m. de radio tenemos un triángulo esférico trirrectángulo $A\,B\,C$. Sobre el lado $B\,C$ tomamos un punto M, y sobre el lado $A\,B$ otro punto N, tales que $A\,N = B\,M = 26°\ 48'\ 32''$. Sea O el polo del círculo menor inscrito en el triángulo esférico $A\,B\,C$. Se pide el área del triángulo esférico $O\,M\,N$, obtenido uniendo los puntos O, M y N por arcos de círculo máximo.

23. De un triángulo esférico sobre una esfera de 20 m. de radio se conocen sus lados: $a = 85º\ 3'\ 42''$; $b = 60º\ 42'\ 50''$; $c = 35º\ 10'\ 8''$. Calcula su área, previa determinación del exceso esférico.

24. En una esfera de radio unidad se da un triángulo esférico $A\,B\,C$, cuyos lados son: $a = 60º$; $b = 50º$; $c = 100º$. Se pide: 1.º Area del triángulo $A\,B\,C$. 2.º Lugar geométrico de un punto variable P de la esfera tal que el triángulo esférico $P\,B\,C$ tenga la misma superficie que el triángulo dado.

25. Supuesta la Tierra esférica, se conocen los siguientes datos: latitud Norte del punto A, $\varphi_1 = 36º\ 36'$; longitud Oeste de A, $\lambda_1 = 30º\ 26'\ 35''$; amplitud del arco $A\,B$, 42° 36′ 10″; ángulo que forma dicho arco con el meridiano de A, contado a partir de dicho meridiano desde el S. hacia el O., en el sentido del movimiento de las agujas del reloj, $Z = 97°\ 59'\ 30''$. Se pide: 1.° φ_2 = latitud Norte del punto B. 2.° λ_2 = longitud Oeste del mismo punto. 3.° Angulo que forma el arco $B\,A$ con el meridiano de B, contado en el sentido antes indicado a partir de dicho meridiano.

26. El puerto A tiene la misma longitud geográfica que el B y sus latitudes son iguales, pero una boreal y otra austral. El puerto C está situado sobre el Ecuador; su longitud es 4° 12′ 24″ E. Se quieren establecer líneas regulares de navegación entre estos puertos, para lo cual se precisa situar una base de aprovisionamiento equidistante de los tres arcos. Determina las coordenadas de esta base, así como sus distancias a los citados arcos y a los tres puertos dados. La navegación se hace según arcos de círculo máximo. Longitud de los puntos A y B: 1° 24′ 33″ Oeste. Latitud: 24º 42′ 44″.

27. Expresa en función de los lados el producto sen A sen B sen C. Idem de los ángulos el producto sen a sen b sen c.

28. Si D es un punto del lado BC de un triángulo esférico ABC, demostrar la relación: cos AD sen BC = cos AB sen DC + cos AC sen BD. ¿En qué se convierte esta relación para triángulos muy pequeños?

29. Demuestra que la bisectriz esférica de un ángulo de un triángulo esférico divide al lado opuesto en dos arcos cuyos senos son proporcionales a los senos de los lados contiguos.

30. Aplica las fórmulas de Gauss y de Neper a un triángulo rectángulo.

31

COORDENADAS ASTRONOMICAS Y TRANSFORMACION DE LAS MISMAS

323. La esfera celeste.

Si nos colocamos en un terreno llano o en alta mar, con buen tiempo, veremos la superficie de la Tierra o del mar extenderse todo alrededor nuestro, tomando una forma perfectamente circular. Por otra parte, encima de nuestra cabeza percibiremos una especie de bóveda, limitada en la tierra, azul durante el día y negra durante la noche, que se denomina *bóveda celeste,* o simplemente *cielo.* Nuestro ojo es el centro de esta bóveda, y también de la línea circu-

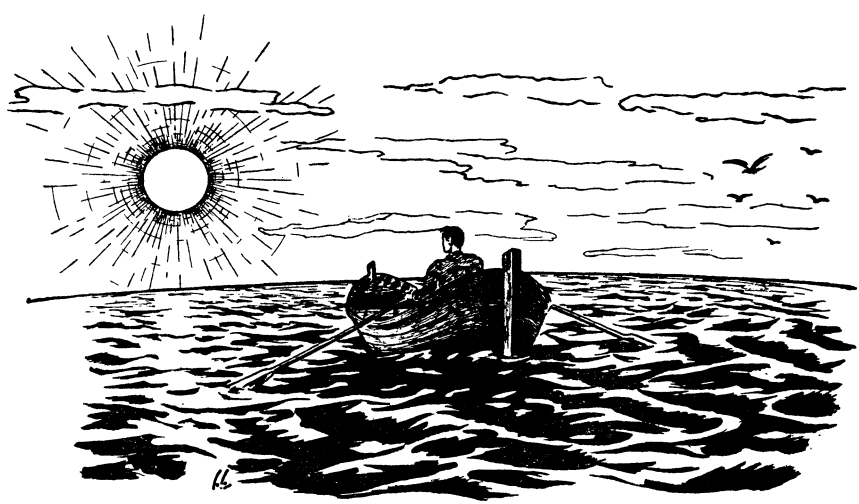


FIGURA 164

lar, netamente definida, que marca la separación entre el cielo y la tierra, y que se llama *horizonte sensible* (fig. 164).

Basta observar durante algún tiempo un astro cualquiera para constatar que se desplaza en el cielo. Así por la mañana se ve aparecer el Sol en un punto del horizonte, ir elevándose hasta una cierta altura, después descender y desaparecer por fin al atardecer en otro punto del horizonte. Pero siendo muy variadas las distancias a que se encuentran de nosotros el Sol, la Luna y las estrellas, vamos a contentarnos con estudiar el desplazamiento del rayo visual que va de nuestro ojo a un astro dado. Para simplificar el lenguaje, supondremos que nuestro ojo sea el centro de una esfera ideal, llamada *esfera celeste,* sobre la cual proyectaremos todos los astros, y consideraremos todas las estrellas como obligadas a permanecer siempre sobre dicha esfera celeste (fig. 165).

Si *O* es el ojo del observador, y si *S* es la esfera celeste, las estrellas *A, B, C* se reemplazan por sus perspectivas *a, b, c* sobre esta esfera. Los arcos de círculo máximo *b c, c a* y *a b,* dados en grados, miden las distancias angulares de las estrellas *A, B* y *C*. Esta concepción corresponde exactamente a las apariencias que nos presenta el cielo; el radio, enormemente grande, de la esfera celeste, se considera indeterminado.

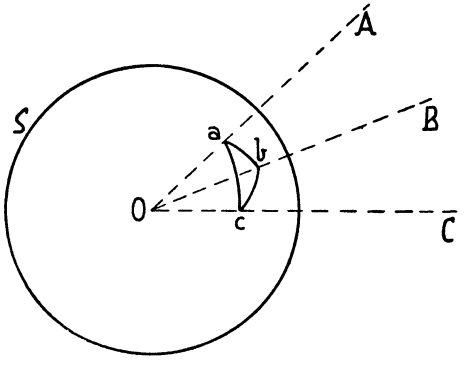


FIGURA 165

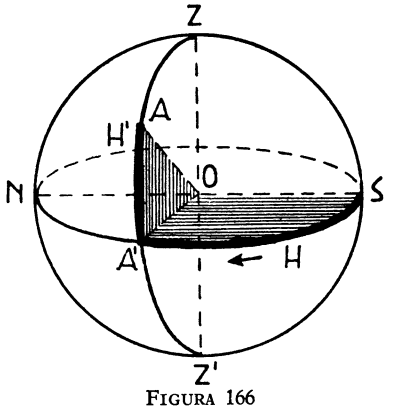


FIGURA 166

324. Coordenadas horizontales.

La vertical del lugar *O* en que estamos colocados corta a la esfera celeste en dos puntos diametralmente opuestos *Z* y *Z'* (fig. 166); el punto *Z* situado encima del observador se llama *zénit;* el punto opuesto *Z'* es el *nadir.*

El plano trazado por O perpendicularmente a la vertical $Z\,Z'$ es el *horizonte verdadero*, que casi coincide con el horizonte sensible, y que corta a la esfera celeste según un círculo máximo $H\,H'$. Es fácil situar sobre el horizonte los cuatro puntos cardinales: Norte, Sur, Este y Oeste. Colocándonos a mediodía de cara al sol (fig. 167), tendremos delante el Sur, detrás el Norte, a izquierda el Este y a derecha el Oeste.

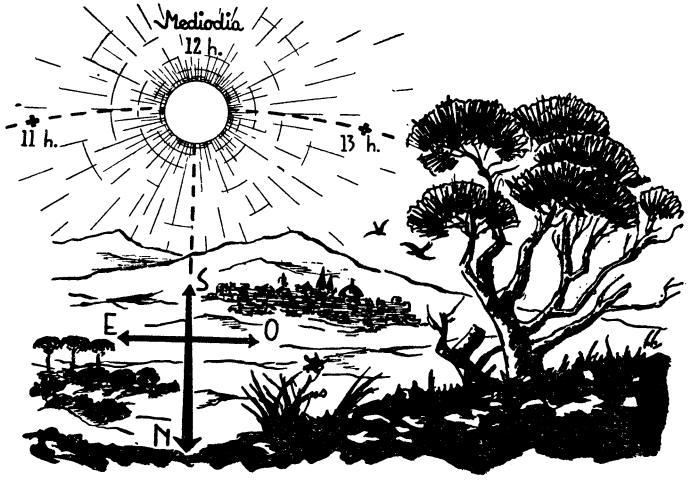


FIGURA 167

Para fijar la posición de un astro sobre la esfera celeste suelen emplearse con frecuencia las *coordenadas horizontales*, que tienen como círculo fundamental el círculo $H\,H'$ (fig. 166), como polo principal el zénit Z, y como origen de arcos sobre $H\,H'$ el punto S, o punto Sur. El sentido en que se cuentan estos arcos es en el sentido retrógrado, indicado por la flecha, o sea en el mismo sentido de las agujas de un reloj, para un observador colocado en $O\,Z$, con los pies en O y la cabeza en Z.

Así, sea A un astro cualquiera; tracemos el semicírculo máximo $Z\,A\,Z'$, y sea A' su intersección con el horizonte $H\,H'$. El arco $S\,A'$ se denomina *azimut* de A, y el arco $A\,A'$ su *altura*. Estas dos coordenadas fijan completamente la posición de un astro A cualquiera sobre la esfera celeste.

325. El horizonte verdadero casi coincide con el horizonte sensible.

En la figura 168 la esfera de centro O' representa la Tierra, P y P' sus polos, O el lugar donde está el observador; la esfera de centro O es la esfera celeste, $O\,Z$ es la vertical del lugar, el círculo $N\,S$, situado en el plano horizontal, esto es, tangente a la esfera terrestre, es el *horizonte verdadero*. El círculo $A\,B$ marca el *horizonte sensible*. Dado que el radio $O\,A$ suele ser como máximo de unos 50 Km. y el

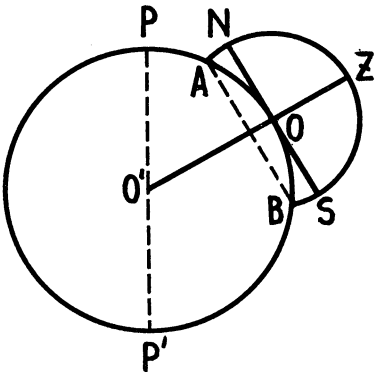


FIGURA 168

radio de la Tierra es de unos 6370 Km., se comprende que ambos horizontes casi coinciden.

326. Descripción del movimiento diurno.

Fijemos como hemos explicado en el número 324 la posición de una estrella sobre la esfera celeste a lo largo de un día. Veremos que dicha posición va variando, y que hay estrellas que siempre permanecen por encima del horizonte, describiendo con movimiento uniforme y en sentido retrógrado pequeños círculos de la esfera celeste (fig. 169). Notaremos con sorpresa que todas las estrellas describen círculos con los mismos polos P y P' y exactamente en el mismo tiempo, un *día sidéreo*, unos 4 minutos más corto que el día solar o civil. Así la estrella A describe el círculo $A\,A'$, la estrella B el círculo $B\,B'$ (fig. 170) con polos P y P'. Tales estrellas se llaman *circumpolares*.

Hay otras estrellas, como la C, que no permanecen siempre sobre el horizonte, sino que una parte de su trayectoria, como la $C_2\,C\,C_1$,

FIGURA 169

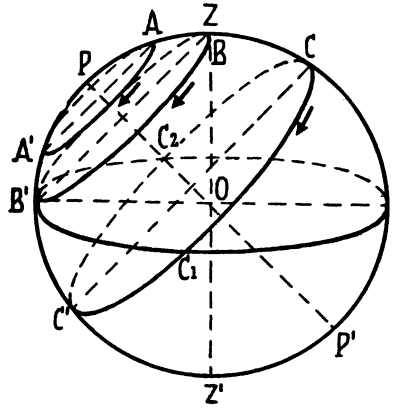


FIGURA 170

la realizan por encima del horizonte, y otra parte, como la $C_1\,C'\,C_2$, por debajo del mismo. Tienen el *orto* en C_2, la *culminación* en C y el *ocaso* en C_1. Pero todas describen círculos con los mismos polos, P y P', en el mismo tiempo, un día sidéreo, y en sentido retrógrado.

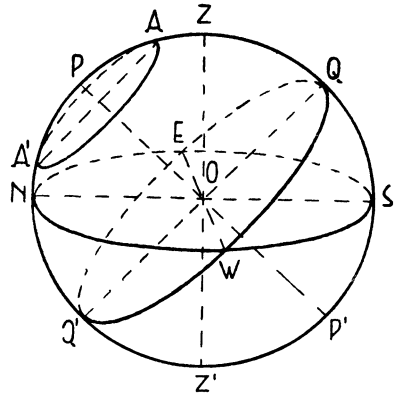


FIGURA 171

En resumen, las estrellas se mueven como si estuvieran fijas invariablemente a una esfera que girara con movimiento uniforme alrededor del diámetro $P\,P'$. Este movimiento se ha denominado *movimiento* diurno. La recta $P\,P'$ se llama *eje del mundo*. Los puntos P y P' son los *polos*. El polo P que está situado encima del horizonte, para un observador situado en el hemisferio Norte de la Tierra, se llama *polo Norte;* el polo opuesto P' es el *polo Sur* (fig. 171). El círculo máximo $Q\,Q'$ que tiene por polos los puntos P y P' es el *ecuador celeste*.

El círculo máximo que pasa por los polos P y P' y el zénit Z es el *meridiano* del lugar O, que corta al plano del horizonte en los puntos *norte* o *septentrión* N, y *sur* o *mediodía* S.

Los planos del horizonte y del ecuador se cortan según la línea *E W*, siendo *E* el *este* u *oriente*, y *W* el *oeste* u *occidente*.

FIGURA 172

327. Movimiento de rotación de la Tierra.

El movimiento diurno no puede explicarse si no es por el movimiento de rotación de la Tierra (fig. 172). Es ésta la que, aislada en el espacio, gira alrededor de su eje, justamente en un día sidéreo, pero en sentido directo (contrario a las agujas del reloj), produciéndonos la impresión de que es la esfera celeste la que gira en sentido retrógrado.

El movimiento de rotación de la Tierra está demostrado por muy diversas experiencias, por ejemplo, la del *péndulo de Foucault*.

328. Coordenadas ecuatoriales.

Las coordenadas horizontales bastan para precisar la posición de una estrella en el cielo con relación al horizonte y al meridiano del lugar dado. Pero por desgracia varían de un lugar a otro. Por lo cual para hacer estudios y tablas que sirvan para todos los puntos de la Tierra ha habido que adoptar otro sistema de coordenadas, denominado *coordenadas ecuatoriales*.

Tiene éste por círculo fundamental el ecuador $Q\,Q'$, y por polo principal el polo Norte P (fig. 173). Vamos a definir la posición de un astro A con ayuda de las nuevas coordenadas.

El semicírculo máximo $P\,A\,P'$ corta al ecuador en A'; al arco $A\,A'$ se denomina *declinación* del astro A. Como punto origen sobre el ecuador suele tomarse un cierto punto γ, llamado *equinoccio de primavera* o *punto vernal*, que definiremos más adelante de una manera precisa. Pues bien, al arco $\gamma\,A'$ se denomina *ascensión recta* del astro. Las dos coordenadas, ascensión recta y declinación, fijan la posición del astro.

Fácilmente se ven las ventajas de este nuevo sistema de coordenadas. En efecto, la *declinación de una estrella cualquiera es cons-*

tante, ya que describe en su movimiento diurno un círculo menor paralelo al ecuador. *La ascensión recta también es constante,* ya que el punto γ está invariablemente ligado a las estrellas, y describe con ellas el movimiento diurno.

Suelen tomarse también otras coordenadas ecuatoriales, tomando como punto origen sobre el ecuador el punto Q, o sea aquél en que corta al meridiano $Z\,Q$ del lugar por encima del horizonte. Dicho meridiano es fijo, porque el eje del mundo lo es, y también la vertical del lugar, supuesta la Tierra en reposo.

Círculo horario de un astro A (figura 173) es el círculo máximo $P\,A$. En virtud del movimiento diurno, el círculo horario de cada astro va variando, coincidiendo con el meridiano cada 24 horas sidéreas.

Así se puede definir otra coordenada ecuatorial: el *ángulo horario,* que es el que forma el meridiano del lugar con el horario del astro en cada instante. Se cuenta de 0° a 360°, en sentido retrógrado, como el acimut, y a partir del Sur.

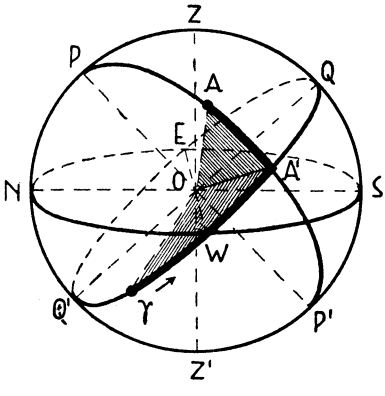


FIGURA 173

Por otra parte al ángulo horario del punto γ se denomina *hora sidérea.* En la figura 173, designando: hora sidérea $= \gamma\,Q = \theta$, ángulo horario de $A = A'\,Q = t$, ascensión recta $= \gamma\,A' = \alpha$, se tiene

$$\theta = \alpha + t$$

329. Descripción del movimiento anuo.

Así como las estrellas están fijas a la esfera celeste, el Sol, la Luna, los planetas, etc., tienen un movimiento propio sobre la misma. Contrariamente a las estrellas, el Sol no tiene el orto y el ocaso en el mismo punto del horizonte todos los días (fig. 174). No tiene tampoco como las estrellas una declinación constante, ni una ascensión recta constante, sino que cada día se retrasa unos 4 minutos respecto a las estrellas. Esto hace que dé una vuelta completa a la esfera celeste exactamente en un año, en sentido inverso al del movimiento diurno. Su ruta está determinada por las 12 constelaciones siguientes: Aries, Toro, Gemelos, Cáncer, León, Virgen, Balanza, Escorpión, Saetero, Capricornio, Acuario y Peces.

Al mismo tiempo que tiene el Sol este movimiento propio sobre

la esfera celeste, es arrastrado por ésta, es decir, participa del movimiento diurno. Este último movimiento es la causa de los días y de

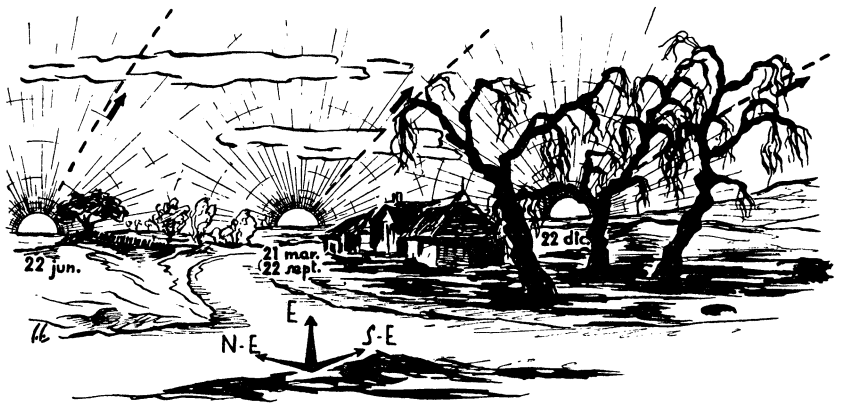


FIGURA 174

las noches, mientras que el primero ocasiona las estaciones y la desigualdad de los días y de las noches.

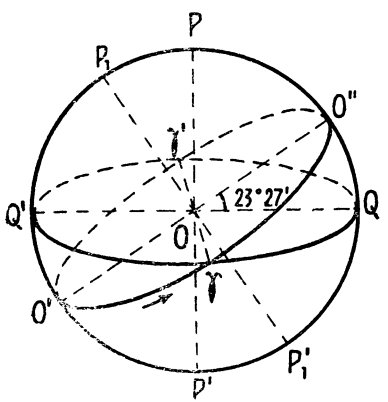


FIGURA 175

330. Le eclíptica: su división.

El Sol describe, en su movimiento aparente sobre la esfera celeste, una circunferencia máxima inclinada sobre el ecuador $Q\,Q'$. Dicha circunferencia máxima $O'\,O''$ descrita por el Sol se llama *eclíptica*. Su plano corta el plano del ecuador según la línea $\gamma\,\gamma'$ (fig. 175), que es la *línea de los equinoccios*. El punto γ en que el Sol encuentra al ecuador pasando del hemisferio sur al hemisferio norte es el *equinoccio de primavera* o *punto vernal;* el punto γ', opuesto a él es el *equinoccio de otoño.*

El ángulo del plano de la eclíptica con el plano del ecuador se denomina *oblicuidad de la eclíptica,* y su valor es aproximadamente de 23° 27′.

Los antiguos dieron el nombre de *zodíaco* a una zona cuyas bases, paralelas al plano de la eclíptica, distan de ella $+8°$ y $-8°$.

Esta zona se ha dividido en doce partes iguales por doce arcos de círculo máximo perpendiculares a la eclíptica, la primera de las cuales pasa por el punto vernal. Estas partes se denominan *signos del zodíaco,* y se les ha dado los nombres de las constelaciones que se encuentran en ellas, que son las doce citadas en el número anterior. Es conveniente conocer sus nombres latinos, por ser muy empleados: Aries, Tauro, Geminis, Cancer, Leo, Virgo, Libra, Escorpio, Sagitario, Capricornio, Acuario y Piscis.

331. La altura del polo sobre el horizonte mide la latitud del lugar.

En la figura 176 la esfera de centro O' representa la Tierra, O el lugar del observador, $O\,Z$ la vertical del lugar, $O\,N$ el plano horizontal y φ la latitud del lugar. La altura del polo sobre el horizonte se

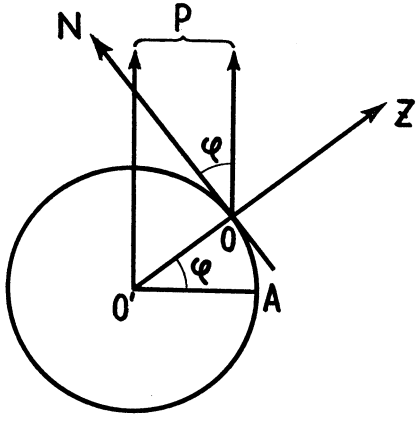


FIGURA 176

determina generalmente midiendo la altura de la estrella polar mediante el teodolito. En la figura es el ángulo $P\,O\,N$, dado que las estrellas pueden considerarse situadas en el infinito. Pero

$$\widehat{P\,O\,N} = \widehat{A\,O'\,O} = \varphi \qquad \text{c. q. d.}$$

332. Transformación de coordenadas.

Estudiaremos ahora la relación que existe entre las diferentes coordenadas de un mismo astro. Para ello se hace uso del *triángulo astronómico,* que no es sino un triángulo esférico sobre la esfera celeste, con vértices en el astro y en dos polos de los planos fundamentales correspondientes.

En el triángulo PZA se tiene (fig. 177), llamando a el acimut del astro A, h su altura, $z = 90^\circ - h$ su *distancia zenital*, t su ángulo horario y δ su declinación:

$$\widehat{ZPA} = t \qquad \widehat{PZA} = 180^\circ - a \qquad \widehat{PAZ} = q$$

$$\overset{\frown}{PZ} = 90^\circ - \varphi \qquad \overset{\frown}{PA} = 90^\circ - \delta \qquad \overset{\frown}{ZA} = z = 90^\circ - h$$

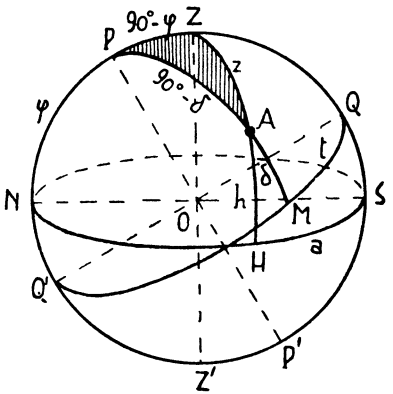


FIGURA 177

El ángulo q se llama *paraláctico;* φ es la latitud del lugar en que OZ es la vertical.

Se deduce de estas relaciones que *conociendo la latitud de un lugar y las coordenadas horizontales de un astro se pueden determinar sus coordenadas ecuatoriales.*

Pues el triángulo PZA queda determinado al conocer dos lados PZ y ZA y el ángulo comprendido PZA.

Recíprocamente: *Si se conoce la latitud de un lugar y las coordenadas ecuatoriales de un astro, se pueden calcular las horizontales.*

Ya que en el triángulo PZA se conocen dos lados PZ y PA y el ángulo comprendido ZPA, y se determinan fácilmente los restantes elementos.

Otro problema que puede resolverse con el triángulo astronómico es la *determinación de la latitud de un lugar.* Midiendo el azimut y la altura de un astro en un momento dado y conociendo su declinación y ascensión recta por las tablas, la latitud del lugar de observación se determina inmediatamente. Pues ahora se conoce los lados AZ, AP y el ángulo PZA. Constantemente los navegantes emplean en esta forma el triángulo astronómico para hallar la latitud del lugar en que se hallan.

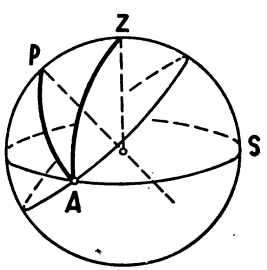


FIGURA 178

333. Orto y ocaso.

Se llama así a la salida y puesta del Sol, o de otro astro; es decir, a los momentos en que,

debido al movimiento diurno, el Sol aparece sobre el horizonte y se oculta tras él (fig. 178).

En este caso, la resolución del triángulo astronómico se simplifica bastante, pues el triángulo es rectilátero, ya que $ZA = 90^o$, y conociendo la latitud del lugar y la declinación del astro se pueden determinar los lugares en que el astro sale y se pone, así como el tiempo durante el que resultará visible.

En efecto, del triángulo PZA se conoce:

$$PZ = 90^o - \varphi \qquad ZA = 90^o \qquad PA = 90^o - \delta$$

El tiempo que se mantendrá sobre el horizonte es el doble del ángulo ZPA (expresado en horas, minutos y segundos).

EJEMPLO 1.—*Determinar el lugar del horizonte en que se pone el Sol en el día del solsticio de verano, y la duración de dicho día, en un lugar cuya latitud Norte es de 40°.*

Por tratarse del día más largo del año, la declinación del Sol dicho día es de 23° 27', oblicuidad de la eclíptica. Por tanto (fig. 178)

$$PA = 90^\circ - 23^\circ\ 27' = 66^\circ\ 33'$$

Además, $PZ = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$, y el ángulo APZ mide la mitad del arco que recorre el Sol sobre el horizonte.

Aplicaremos las fórmulas 1.ª y 2.ª de [1''] de los triángulos rectiláteros, haciendo

$$a = ZA = 90^\circ \quad ; \quad \widehat{A} = \overset{\frown}{APZ}$$

$$b = PA = 66^\circ\ 33' \quad ; \quad \widehat{B} = \overset{\frown}{AZP}$$

$$c = PZ = 50^\circ \quad ; \quad \widehat{C} = \overset{\frown}{PAZ}$$

Resulta así:

1.ª) $\cos APZ = -\operatorname{ctg} 66^\circ\ 33' \cdot \operatorname{ctg} 50^\circ.$

$$APZ = 180^\circ - 68^\circ\ 39'\ 19'' = 111^\circ\ 20'\ 41''.$$

2.ª) $\cos 66^\circ\ 33' = \cos AZP \cdot \operatorname{sen} 50^\circ \quad ; \quad \cos AZP = \dfrac{\cos 66^\circ 33'}{\operatorname{sen} 50^\circ}$

$$AZP = 58^\circ\ 42'\ 8''.$$

Ya que a cada hora del día corresponden 15° en el recorrido del Sol, el tiempo que está éste sobre el horizonte es

$$t = \frac{2 \cdot (111^\circ\ 20'\ 41'')}{15^\circ} = \frac{801682''}{5400''} = 14^{h}.\ 50^{m}.\ 44^{s}.$$

que es la duración del día.

El ocaso del Sol se verifica en un punto del horizonte situado a 58° 42' 8'' del punto cardinal Norte.

EJEMPLO 2.—*Hallar la hora solar en un lugar de latitud 40° 42′ N, en el instante en que por la mañana el sol tiene una altura de 34° 32′ y su declinación es 12° 54′.*

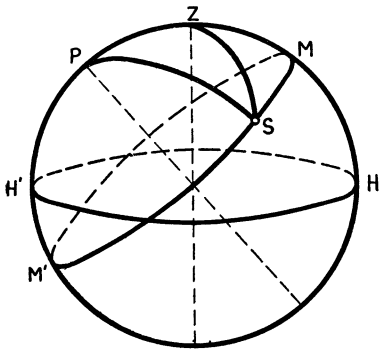


FIGURA 179

Solución.—En la figura 179 $H'H$ es el horizonte, Z el zenit, P el polo celeste, y $M'SM$ el círculo de 12° 54′ de declinación que describe el sol dicho día. Hay que hallar el ángulo P en el triángulo astronómico PZS, en el que:

$$ZS = 90° - \text{altura} = 55° 28'$$
$$PS = 90° - \text{declinación} = 77° 6'$$
$$ZP = 90° - \text{latitud} = 49° 18'$$

Se trata del primer caso de resolución de triángulos oblicuángulos:

$$2p = 181° 52' \quad ; \quad p = 90° 56' \quad ; \quad p - a = 35° 28'$$
$$p - b = 13° 50' \quad ; \quad p - c = 41° 38'$$
$$\log \text{tg} \frac{P}{2} = \frac{1}{2} [\log \text{sen } 13° 50' + \log \text{sen } 41° 38' + \text{colog sen } 90° 56' + \text{colog sen } 35° 28']$$
$$\frac{P}{2} = 27° 37' 15'' \quad ; \quad P = 55° 14' 30'' = 3^h 40^m 58^s$$

Son las $12^h - 3^h 40^m 58^s = \mathbf{8^h 19^m 2^s}$.

EJEMPLO 3.—*Hallar la hora solar y el acimut del orto y del ocaso del sol en Reykjavik (Islandia), cuya latitud es 64° 9′, en un día en que la declinación del sol es + 15° 45′* (fig. 180).

Solución. — En el triángulo astronómico ZPS es:

$$PS = 74° 15'$$
$$ZP = 25° 51'$$
$$ZS = 90°$$

Su triángulo polar es un triángulo rectángulo para el que $\hat{Z} = 105° 45'$, $\hat{S} = 154° 9'$, $\hat{P} = 90°$. Se trata del 6.° caso de triángulos rectángulos:

$$\cos p' = \text{ctg } S' \text{ ctg } Z' \quad ; \quad \cos z' = \frac{\cos Z'}{\text{sen } S'}$$

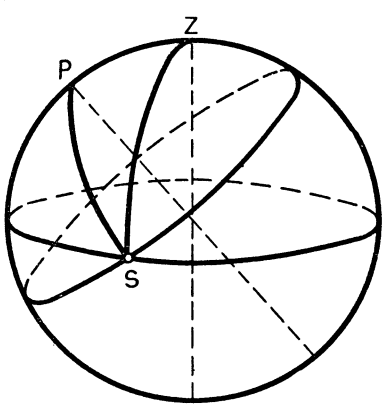


FIGURA 180

$$p' = 54^\circ\ 24'\ 6'' \quad ; \quad z' = 128^\circ\ 30'\ 6''$$

Por tanto:

$$\hat{P} = 125^\circ\ 35'\ 54'' = 8^h\ 22^m\ 24^s$$

$$\hat{Z} = 51^\circ\ 29'\ 54''$$

En el orto del Sol la hora solar es:

$$12^h - 8^h\ 22^m\ 24^s = \mathbf{3^h\ 37^m\ 36^s}$$

y el acimut del Sol es:

$$180^\circ - 51^\circ\ 29'\ 54'' = \mathbf{128^\circ\ 30'\ 6''}$$

En el ocaso la hora solar es:

$$12^h + 8^h\ 22^m\ 24^s = \mathbf{20^h\ 22^m\ 24^s}$$

y el acimut:

$$180^\circ + 51^\circ\ 29'\ 54'' = \mathbf{231^\circ\ 29'\ 54''}$$

EJEMPLO 4.—*Determinar la latitud de un lugar en el que, en el día del solsticio de verano, la razón de la duración del día a la de la noche es igual a* $\frac{5}{3}$.

Solución.—Sean PP' el eje de la Tierra (fig. 181), EE' la sección del plano del Ecuador y SS' la del paralelo descrito por el Sol. La declinación del Sol el día mencionado es $\xi = 23^\circ\ 27'$.

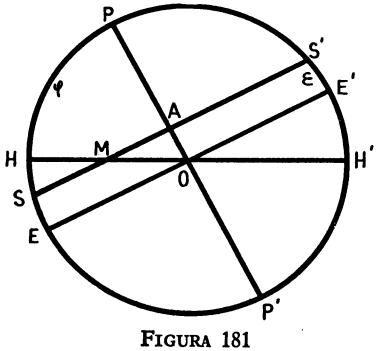


FIGURA 181

Sea φ la latitud del lugar. Es de día mientras el Sol está sobre el arco proyectado en $S'M$, y de noche cuando está en el arco proyectado en SM. Por tanto, llamando α al semiángulo en el centro del círculo $S'S$ correspondiente al arco de noche, tenemos:

$$\frac{180^\circ - \alpha}{\alpha} = \frac{5}{3} \quad ; \quad 540^\circ - 3\alpha = 5\alpha \quad ;$$

$$\alpha = \frac{540^\circ}{8} = 67^\circ\ 30'$$

Pero:

$$\cos \alpha = \frac{AM}{AS} = \frac{AO \operatorname{tg} \varphi}{AO \operatorname{ctg} \xi} = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \xi$$

Luego:

$$\operatorname{tg} \varphi = \cos \alpha \cdot \operatorname{ctg} \xi = \cos 67^\circ\ 30' \cdot \operatorname{ctg} 23^\circ\ 27'$$

$$\log \operatorname{tg} \varphi = \log \cos 67^\circ\ 30' + \log \operatorname{ctg} 23^\circ\ 27' = \overline{1}'582840 + 0'362735 =$$

$$= \overline{1}'945575 \quad ; \quad \varphi = \mathbf{41^\circ\ 25'\ 9''}$$

EJERCICIOS

1. Siendo la latitud de Madrid 40° 24′, ¿en qué lugar del horizonte se pondrá el Sol en el día más largo del año, y cuánto durará dicho día?

2. Un avión sale de un punto *A*, cuya longitud es 20° E., y se dirige con una velocidad de 800 Km./h. a otro punto *B*, situado a 3.600 Km. de *A*, y cuya longitud geográfica es 5° O. Si el avión sale de *A* cuando en el meridiano de Greenwich son las 10 de la mañana, determinar la hora local de salida de *A*, y la hora local de llegada a *B*.

3. En un punto del hemisferio Norte de 40° 57′ de latitud, se halla situada una torre de 60 m. de alta. Determinar: 1.°, la sombra de la torre el día del solsticio de verano y a la hora de mediodía; 2.°, la altura del Sol en dicho instante.

4. Hallar la latitud de un lugar del hemisferio Norte, si un edificio de 30 m. situado en él arroja una sombra de 22,239 m. el día 21 de junio a la hora de mediodía.

5. ¿Qué valores puede tomar la declinación de una estrella circumpolar, o sea, que permanece constantemente encima del horizonte, en un lugar de 50° de latitud?

6. ¿Entre qué límites debe estar comprendida la declinación de una estrella para que tenga orto y ocaso, en un lugar de 47° 30′ de latitud?

7. ¿Cuál es la declinación del Sol cuando el día es igual a la noche?

8. Calcular los acimutes que corresponden al orto y al ocaso de una estrella cuya declinación es igual a 14° 30′ N. en un lugar cuya latitud es 40° 20′ N.

9. Hallar la latitud de un observador del hemisferio Norte, si a las $10^h\ 25^m\ 36^s$ de tiempo solar, la altura del Sol es 40° 10′, cuando su declinación es 15° 38′.

10. Hallar el acimut del Sol y el tiempo solar en un punto en que la latitud es 38° 55′ en un instante de la tarde en que la altura del Sol es 25° 40′ y su declinación —19° 15′.

11. Hallar la duración del día más corto del año (declinación del Sol —23° 27′), y el acimut del orto y del ocaso del Sol en un punto de la Tierra de latitud 64° 9′ N.

12. Hallar la latitud de un observador del hemisferio Norte sabiendo que, cuando la altura del Sol es 54° 28′, la declinación es —15° 42′ y el acimut 20° 10′.

13. Un observador situado en un lugar de 40° 17′ de latitud N. mide por la tarde la altura de una estrella, cuya declinación es 30° 23′ N. Obtiene $h = 25° 36'$. ¿Cuál es el ángulo horario y el acimut de la estrella?

14. Resolver un triángulo esférico dados $a = 57° 56' 53''$, $b = 137° 20' 33''$, $C = 94° 48' 6''$.

15. Resolver el triángulo esférico en el que $a = 52^{o}\ 45'\ 20''$, $b = 71^{o}\ 12'\ 40''$, $A = 46^{o}\ 22'\ 10''$.

16. La ascensión recta de una estrella de 30° de declinación, a las 9 horas de tiempo sidéreo, es 75°. Calcular la altura de esa estrella sobre el horizonte en el momento en que su acimut es de 90°.

17. Calcular la declinación de un astro que en Berlín alcanza su culminación a los 80°.
Decir si dicho astro es circumpolar en esa latitud.
(*Nota.*—Culminación: Máxima altura sobre el horizonte).
Latitud de Berlín: 52° 29' 7".

32

MOVIMIENTOS DE LA TIERRA TIEMPOS SIDEREO Y SOLAR: EL CALENDARIO

334. Movimiento de traslación de la Tierra.

El movimiento aparente del Sol en la esfera celeste no es sino una consecuencia del movimiento de la Tierra alrededor del Sol. Es ésta la que en el término de un año describe una órbita elíptica, casi circular, alrededor del Astro Rey, a lo que se denomina movimiento de *traslación* de la Tierra.

Esto hace que el Sol se nos proyecte cada día en sitio distinto sobre la bóveda celeste (fig. 182), aparentando describir en la misma una circunferencia máxima en el término de un año.

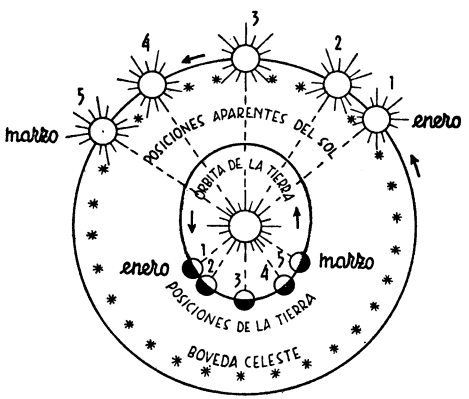


FIGURA 182

335. Consecuencias del movimiento de traslación.

Son dos principalmente: las estaciones y la desigualdad de duración de los días y de las noches.

1.º En su movimiento de traslación la Tierra se mueve en el plano de la eclíptica, y su eje, inclinado 23º 27′ respecto a la normal a dicho plano, se conserva siempre paralelo a sí mismo (fig. 183). Por tanto, en la posición 1 el Sol da verticalmente sobre el trópico de Cáncer, en el hemisferio Norte; es el comienzo del *verano* para dicho hemisferio. En la posición 2 el Sol cae verticalmente sobre el Ecuador, los dos hemisferios están igualmente calentados por el Sol;

es el comienzo del *otoño*. En la posición 3 el Sol da verticalmente sobre el trópico de Capricornio, y en cambio sus rayos caen muy inclinados sobre el hemisferio Norte; es el comienzo del *invierno* para el mismo. Finalmente, en la posición 4 el Sol vuelve a caer normalmente sobre el ecuador; es el inicio de la *primavera*.

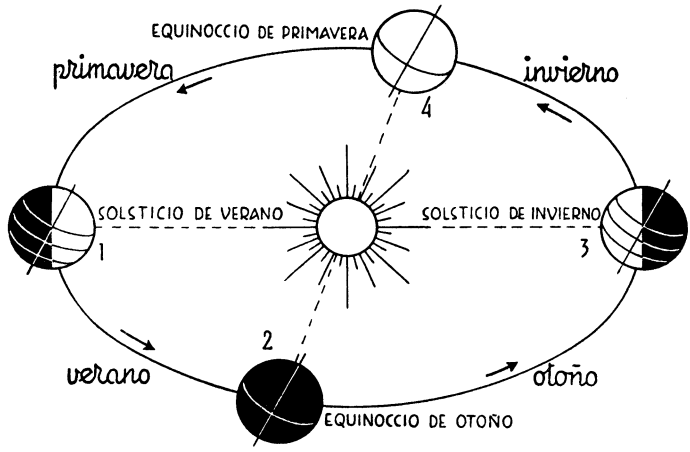


FIGURA 183

La figura 184 muestra cómo el calor producido por el Sol sobre la Tierra depende de la inclinación con que sus rayos caen sobre la misma. Los tres haces de luz solar, 1, 2 y 3, llevan la misma cantidad de energía calorífica, pero el primero se distribuye en una extensión muy grande, mientras el tercero en una superficie mucho más pequeña. Es por tanto evidente que a cada punto del primer caso le corresponderá menor cantidad de energía que en el segundo

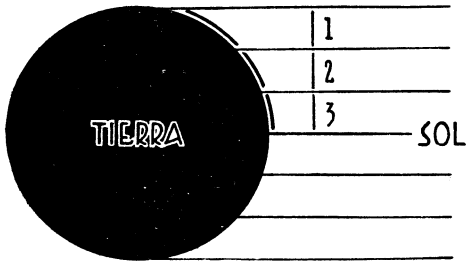


FIGURA 184

2.º *Desigualdad de duración de los días y de las noches.* Supongamos la Tierra en la posición 1 de la figura 183. La parte sombreada es la que se encuentra de noche. Un punto situado en el trópico de Cáncer recorre el arco de *A* a *B* de día y de *B* a *A* de noche (fig. 185). Pero el primero es mayor que el segundo. Luego en dicho punto el día es mayor que la noche. Esta desigualdad aumenta a medida que

aumenta la latitud, hasta el punto de que en todo el círculo polar ártico el día dura las 24 horas. El Sol no se pone. En el polo *P* el día

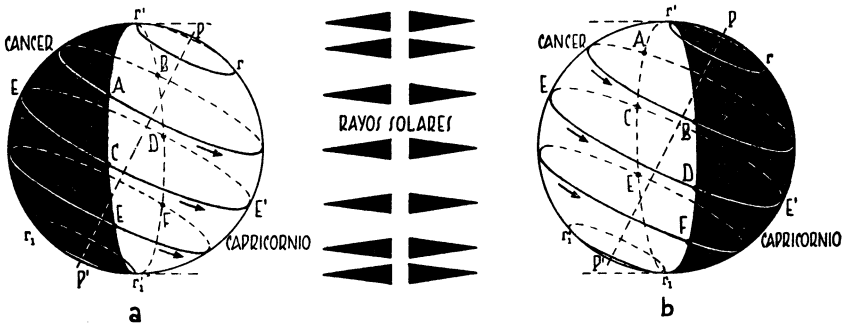


FIGURA 185

dura 6 meses (fig. 185) a). Lo contrario sucede en el solsticio de invierno (posición 3). El punto situado en el trópico de Cáncer recorre el arco de *A* a *B* de día, y de *B* a *A* de noche, siendo el primero menor que el segundo. Luego entonces el día es más corto que la noche. En el círculo polar ártico la noche dura las 24 horas, y en el polo *P*, 6 meses.

336. Equinoccios y solsticios.

Como consecuencia del movimiento de traslación cada día del año describe el Sol una trayectoria distinta, situada siempre en planos paralelos al del Ecuador (fig. 186). A medida que dicho plano se aproxima al zenit *Z* los días son cada vez más largos, alcanzando su máximo el 21 de junio, en que la trayectoria del Sol es el círculo *N T M R*. Es el *solsticio* de verano. Desde el 21 de junio al 23 de septiembre los días van decreciendo. En la última fecha mencionada el Sol recorre el ecuador celeste *Q Q'*. Es el *equinoccio* de otoño: los días son iguales a las noches. Del 23 de septiembre al 21 de diciembre los días siguen decreciendo, alcanzando su mínimo el 21 de diciembre, en que el Sol recorre la circunferencia *V W S X*. Es el *solsticio* de

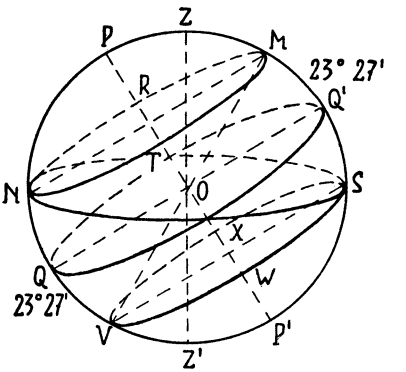


FIGURA 186

invierno. A partir de esa fecha los días comienzan a alargar, llegando a igualar a las noches el 21 de marzo, *equinoccio* de primavera, en que el Sol recorre de nuevo el Ecuador $Q\,Q'$.

337. Tiempo sidéreo y tiempo solar verdadero.

Se llama *día sidéreo* al intervalo de tiempo entre dos pasos consecutivos de una estrella por el mismo meridiano (un giro completo de la esfera celeste).

Día solar verdadero es el intervalo de tiempo entre dos pasos consecutivos del Sol por el mismo meridiano.

Vamos a ver que así como los días sidéreos son todos iguales, los días solares verdaderos no son iguales en las distintas época del año. Sabemos que en su movimiento de traslación alrededor del Sol la Tierra describe una elipse, de la cual el Sol ocupa uno de los focos (fig. 187). El eje mayor $A\,C$ de la elipse se denomina *línea de los ápsides*. Sus extremos, el más cercano al Sol se llama *perihelio, A*, y el más alejado, o C es el *afelio*. En la órbita aparente (fig. 182) la Tierra parece fija y situada en uno de los focos de la elipse que parece describir el Sol. Entonces se llama *perigeo* al vértice del eje mayor más próximo a la Tierra, y *apogeo* al opuesto.

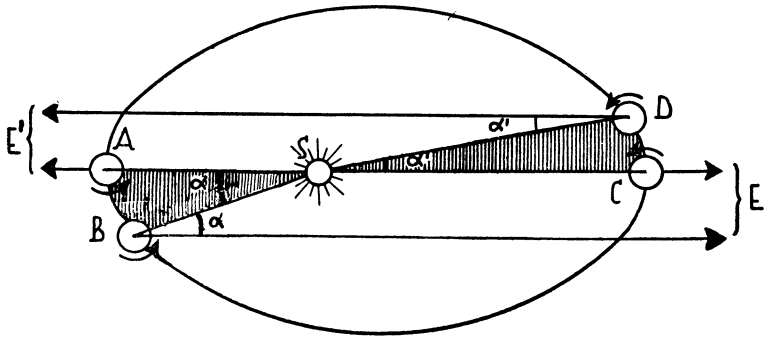


FIGURA 187

Pues bien, supongamos la Tierra en el perihelio A (cosa que sucede el 11 de enero) y que da una vuelta completa alrededor de su eje, al mismo tiempo que se traslada a la posición B de su órbita. Una estrella E que en la posición A estaba pasando por un cierto meridiano, en la posición B se encuentra exactamente sobre el mismo meridiano. Luego ha transcurrido un *día sidéreo*. Este coincide, por tanto, con el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor de su eje, y como éste es constante e inmutable, como todos los mo-

vimientos celestes, sabiamente ordenados por el Creador, también lo es el día sidéreo.

Vemos además en la figura, que en la posición B el Sol no se encuentra todavía sobre el meridiano del lugar citado. Ha de girar todavía la Tierra un cierto ángulo α, en lo que invierte unos 4 minutos, algo más, algo menos, que es la diferencia entre el día solar y el día sidéreo. Pero es fácil ver que esta diferencia no es constante, sino variable. En efecto, supongamos ahora la Tierra en el afelio C, y que da una vuelta completa alrededor de su eje al mismo tiempo que se traslada a D. Se observa, lo mismo que antes, que ha transcurrido exactamente un día sidéreo; pero que para que transcurra un día solar, la Tierra ha de girar todavía un cierto ángulo α'. La segunda ley de Kepler nos dice que las áreas barridas por el radio vector $A\,S$ en tiempos iguales son iguales. Luego las áreas de los sectores elípticos $A\,S\,B$ y $C\,S\,D$ son iguales. Pero puesto que la altura $A\,S$ del primero es menor que la correspondiente $C\,S$ del segundo, necesariamente el arco $A\,B$ es mayor que $C\,D$, y también $\alpha > \alpha'$. Esto nos indica que el suplemento de aproximadamente 4 minutos que hay que añadir al día sidéreo para obtener el día solar, es variable. *El día solar verdadero es máximo en el perihelio, y mínimo en el afelio.*

Hay otra causa que contribuye a hacer variables los días solares, y es la oblicuidad del plano de la eclíptica sobre el del ecuador. Es fácil ver (fig. 188) que aunque el movimiento del Sol sobre la eclíptica a lo largo de un año fuera uniforme, su proyección sobre el ecuador no lo sería. Así llamamos α y β dos arcos recorridos por el Sol sobre la eclíptica en tiempos iguales, el primero en un equinoccio, y el segundo en un solsticio, aunque fueran α y β iguales, es inmediato que $\alpha' < \alpha$, por ser oblicuos uno al otro, y $\beta' = \beta$, por ser paralelos; luego $\alpha' < \beta'$. Los diedros que proyectan uno y otro arco son desiguales, y como el tiempo que tarda el plano meridiano en recorrer este diedro es el suplemento que es preciso añadir al día sidéreo para obtener el solar, es claro que, por esta sola causa, éste será variable.

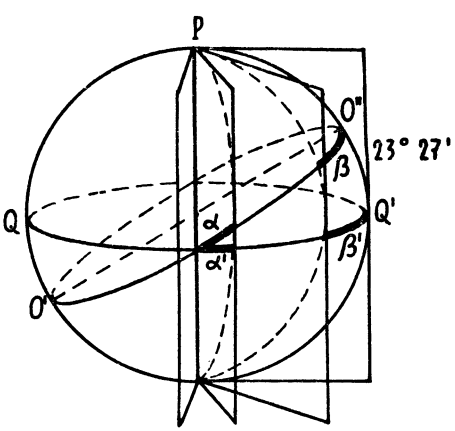


FIGURA 188

338. Tiempo solar medio. Ecuación del tiempo.

Dada la absoluta regularidad del día sidéreo, parecía lógico tomarlo como unidad de tiempo. Así lo han hecho, en efecto, los astrónomos para regular sus péndulos y efectuar sus mediciones. Pero para nuestra vida corriente, regida por el Sol, se ha preferido tomar como unidad de tiempo el día solar. Ahora bien, dada la desigualdad de los días solares verdaderos a lo largo del año, ha sido necesario crear el *día solar medio,* que es como *la media aritmética de todos los días solares del año,* que es $24^h\ 3^m\ 56^s{,}555$, expresado en horas sidéreas; o también como *el tiempo que tarda en dos pasos consecutivos por un mismo meridiano un Sol ficticio que recorriera el ecuador con movimiento angular constante y en el mismo período de traslación que el Sol verdadero.*

Claro está que, salvo en los extremos del eje mayor de la elipse, la ascensión recta del Sol verdadero y la del Sol ficticio no coinciden. Llamando α_m la ascensión recta del Sol medio, y α la del verdadero, se tiene

$$\alpha_m - \alpha = E_o$$

donde E_o se denomina *ecuación del tiempo,* siendo unas veces positivo y otras negativo. Representa lo que hay que añadir al tiempo verdadero para obtener el tiempo medio. Sus valores están tabulados en las efemérides astronómicas.

339. Calendarios, reforma juliana y gregoriana.

Según la definición que se ha dado de día solar medio, el período de tiempo que tarda el Sol en recorrer su órbita completa—año sidéreo—es de 365 días, 5 horas, 48 minutos y 6 segundos. Es decir, 365,242198 días medios.

Repasemos ahora someramente la historia del calendario y su ordenación actual.

Tras numerosas tentativas de los romanos, que cambiaban con frecuencia el número de meses, el de días de cada mes y hasta el de días en el año, *Julio César,* el año 47 a. de J. C. (707 de la fundación de Roma), llamó al astrónomo de Alejandría *Sosígenes,* que estableció el año de 365 días. Pero como el sobrante por cada año es aproximadamente un cuarto de día, fijó que cada cuatro años se añadiese un día al mes que llamaban Mercedino, y que contaba con 23.

Ahora bien, tomando como fracción sobrante 0,25 en lugar de 0,2422, Sosígenes cometía un error. Exactamente, a su año le sobraban 11 minutos y 12 segundos, con lo que contaban más días de los debidos. El error del calendario juliano era de un día cada 128 años.

La adición de un día cada cuatro años era excesiva, por lo que en 1582 resultó que el equinoccio de primavera, en lugar del 21 de marzo, caía el 11 de dicho mes.

El año 1582, el Papa *Gregorio XIII* mandó suprimir 10 días del calendario para que el equinoccio de primavera coincidiese de nuevo con el 21 de marzo. Además, como el error del calendario juliano es con gran aproximación de tres días en 400 años (por exceso), estableció que se considerasen como no bisiestos los años múltiplos de 100, excepto los múltiplos de 400.

Resulta entonces que, añadiendo 97 días cada 400 años, la duración media del año viene a ser de 365 días, 5 horas, 49 minutos, 12 segundos, que sobrepasa en algunos segundos a la duración verdadera. Como este nuevo error equivaldría a un día por cada 4.000 años, aproximadamente, se ha convenido en que el año 4000 y sus múltiplos no sean bisiestos.

Resumiendo: *Son bisiestos los múltiplos de 4 excepto los que terminan en dos ceros, a menos que las centenas sean múltiplo de 4. Tampoco son bisiestos el 4.000 y sus múltiplos.*

EJERCICIOS

1. Eratóstenes se enteró de que en la ciudad de Siena, situada exactamente al sur de Alejandría, el Sol en el día de solsticio de verano se reflejaba en las aguas del fondo de un pozo, es decir, pasaba por la vertical. Comprobó que en Alejandría el Sol formaba en el mismo día 7° 30′ con la vertical, y de aquí dedujo la circunferencia y el radio de la Tierra, después de medir la distancia entre Siena y Alejandría. Dedúzcase esta distancia (curvilínea) y la rectilínea correspondiente.
2. Dígase cuáles son los valores de la razón entre la altura de una torre y la longitud de su sombra en Siena y en Alejandría los días de solsticio de verano, de invierno y el día del equinoccio, a la hora de mediodía.
3. Sabiendo que la luz del Sol tarda 8 minutos 20 segundos en llegar a la Tierra, calcular los ángulos del triángulo Luna-Tierra-Sol cuando la primera está en cuarto creciente. Distancia Tierra-Luna igual a 384.000 kilómetros (Aristarco intentó medir el ángulo Tierra-Sol-Luna en esta posición para deducir de él, recíprocamente, la distancia Tierra-Sol; su medición fué, sin embargo, muy errónea, debido a la pequeñez de dicho ángulo y a la imperfección de los medios y aparatos de medida).
4. ¿Cuál es la duración del día más largo y la del más corto en Berlín (latitud 52° 30′)?
5. Una calle madrileña tiene la dirección N. E.-S. O. Averiguar a qué hora (solar) no habrá sombra en sus aceras en los días más largo y más corto del año.

6. Averiguar la latitud de una ciudad en que el hecho consignado en el ejercicio anterior ocurre en el momento de salir el Sol el día más largo del año.

7. Averiguar la latitud de un lugar en que el Sol se pone a las tres de la tarde (hora solar) en el día más corto del año.

8. Las coordenadas horizontales de un astro *A* son: azimut, 8º 20′; altura, 30º Norte. Calcular sus coordenadas ecuatoriales. (Latitud del lugar, 50º N.)

9. 1.º ¿Cuál es, en el movimiento diurno, el espacio recorrido por un punto del Ecuador terrestre en un segundo de tiempo sidéreo?

   2.º ¿Cuáles son los lugares geográficos terrestres para los cuales un punto recorre: a) 424,7 m., b) 184,3 m.?

   3.º ¿Cuál es el espacio recorrido en las mismas condiciones por un punto de 47º 15′ de latitud N.?

   4.º ¿Cuáles son las distancias cenitales del centro del Sol, en dicho punto, durante los equinoccios y durante los solsticios (a mediodía)?

10. La mínima distancia a que puede encontrarse un satélite artificial en su órbita alrededor de la Tierra es, supongamos. 200 km.

    1.º Calcular el área del casquete terrestre que se divisará desde el satélite en ese momento.

    2.º Supuesto un momento el satélite fijo sobre la vertical de Madrid a esa distancia mínima, ¿será visible toda la Península Ibérica si suponemos que Madrid sea su centro?

    3.º ¿Cuál será la máxima distancia en km. medidos sobre el arco de círculo máximo —desde Madrid en los dos supuestos anteriores— al límite de la porción del área terrestre visible desde el satélite?

    NOTA: La Tierra se supone esférica y la longitud de su radio se deducirá de la definición vulgar de metro.

11. Obtener razonadamente la altura meridiana del Sol el día del solsticio de verano en un lugar cuya latitud sea 53º 27′. En ese instante del paso meridiano, ¿qué sombra arroja un poste vertical de tres metros sobre un plano horizontal?

12. Haciendo centro en un vértice de un tetraedro regular de 5 m. de arista, se construye una superficie esférica de 2 m. de radio; la intersección de la superficie esférica y el tetraedro es un triángulo esférico. *a)* Hallar el diedro del tetraedro utilizando el triángulo esférico. *b)* Hallar, en m.², el área del triángulo esférico.

13. En el día del equinoccio de primavera se ha medido en Madrid la sombra de un lápiz, en posición vertical, de 15 cm. La medición fue efectuada después del mediodía, y dio 25 cm. ¿Qué hora era?
    Latitud de Madrid, 40º 24′ 29″.

14. Un marino calcula una noche la altura de la estrella polar, que son 45º. Sabe que el Sol se ha puesto a las 7 h. de la tarde y desea hallar la declinación del Sol en el instante de su puesta. ¿Cómo lo calcula?

15. La latitud de un lugar de la tierra es de 48º 19′. La altura del Sol, a las 6 horas de la mañana, es de 10º sobre el horizonte. Calcular la declinación de ese astro en ese día.

16. ¿A qué hora de tiempo solar verdadero sale y se pone el Sol en un lugar de 45° de latitud N. el día en que la declinación de ese astro es de 20°? ¿Cuál es la duración del día y de la noche en dicho lugar en esa fecha?

17. Un avión parte de un punto del Ecuador terrestre situado a 80° W de Greenwich para seguir un arco de circunferencia máxima que forma con el Ecuador un ángulo α, tal que $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. ¿Cuánto tiempo deberá volar, a la velocidad constante de 500 Km/h., para alcanzar el meridiano 70° E? ¿Qué latitud tiene el punto en el cual lo alcanza?

18. En el día del solsticio de verano hallar la latitud mínima de un lugar de la Tierra para que no tenga noche. En dicho día, y para otro lugar de la Tierra cuya latitud es de 45° N, hallar la duración del día y de la noche.

Pedidos a LIBRERIA S. M. GENERAL TABANERA, 39 - MADRID (19)
TELEFONOS 208.68.05 Y 208.58.40